Мир науки. Педагогика и психология / World of Science. Pedagogy and psychology https://mir-nauki.com

2022, №3, Том 10 / 2022, No 3, Vol 10 https://mir-nauki.com/issue-3-2022.html

URL статьи: https://mir-nauki.com/PDF/64PDMN322.pdf

**Ссылка для цитирования этой статьи:**
Кузьмин, С. Г. Этапы решения стереометрических задач как основа методики обучения школьников их решению / С. Г. Кузьмин, Р. Ю. Костюченко // Мир науки. Педагогика и психология. — 2022. — Т. 10. — № 3. — URL: https://mir-nauki.com/PDF/64PDMN322.pdf

**For citation:**
Kuzmin S.G., Kostyuchenko R.Yu. The stages of solving stereometric problems as the basis of the methodology of teaching schoolchildren to solve them. *World of Science. Pedagogy and psychology*, 10(3): 64PDMN322. Available at:
https://mir-nauki.com/PDF/64PDMN322.pdf. (In Russ., abstract in Eng.).

**Кузьмин Сергей Геннадьевич**
ФГБОУ ВО «Омский государственный педагогический университет», Омск, Россия
Доцент
Кандидат физико-математических наук
E-mail: kusegen@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6984-885X
РИНЦ: https://www.elibrary.ru/author_profile.asp?id=693799

**Костюченко Роман Юрьевич**
ФГБОУ ВО «Омский государственный педагогический университет», Омск, Россия
Доцент
Кандидат педагогических наук, доцент
E-mail: kryu@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7763-0631
РИНЦ: https://www.elibrary.ru/author_profile.asp?id=353756

# Этапы решения стереометрических задач как основа методики обучения школьников их решению

**Аннотация.** В статье рассматривается вопрос о методике решения стереометрических задач в школьном курсе математики. Математические задачи люди решают с давних времён, однако, включение в процесс их решения ученика с его личностными знаниями, умениями, психологическими особенностями становится предметом исследований лишь в прошлом веке. Задачи по геометрии, в частности по стереометрии, представляются для учащихся более сложными, чем по другим разделам школьной математики. Понятно, что как учителя на практике, так и учёные в теоретических исследованиях ищут способы совершенствования процесса обучения решению стереометрических задач. Однако результаты итоговой аттестации говорят о необходимости совершенствования методики обучения геометрии. Поэтому нами на основе анализа научно-методической литературы, наблюдения, обобщения рассматривается четырёхэтапная модель обучения школьников решению стереометрических задач. Данная модель включает такие этапы работы с задачей, как ознакомление с условием, поиск плана решения, реализация этого плана и познавательный анализ. В рамках рассматриваемой статьи изложение ведется с опорой на стереометрическую задачу. При этом, несмотря на единственность исходной задачи, авторами выстраиваются теоретические обобщения по видам деятельности, адекватных каждому этапу решения стереометрической задачи. Определенным достоинством можно считать то, что в статье указанные виды деятельности описываются их полной совокупностью. Здесь свойство полноты понимается как логическая законченность перечисления. Сказанное определяет теоретическую значимость проведенного исследования. Вместе с тем, с практической точки зрения материал статьи будет интересен педагогам-практикам, поскольку на основе её текста становится возможным разработка уроков по обучению школьников решению стереометрических задач.

**Ключевые слова:** методика обучения математике; стереометрическая задача; решение задач; этапы решения задач; поиск плана решения; оформление доказательства; познавательный анализ; составление задач

## Введение

В процессе обучения математике решение задач является одним из основных видов деятельности учащихся. И это не случайно: «Если прежде задачи в методике обучения математике рассматривались как цель обучения, то сейчас задачи рассматриваются как средство организации учебной деятельности учащихся на всех этапах обучения математике» [1, с. 77]. Среди всех школьных предметов именно математика изобилует различными типами задач и упражнений. Однако можно констатировать, что к окончанию школы многие учащиеся так и не приобретают не только навыки по организации своей деятельности в процессе решения задачи, но и с трудом решают задачи, выходящие за рамки стандартных, типовых. Особенно это касается задач по геометрии. При анализе результатов Единого государственного экзамена в 11 классе экспертами отмечается, что даже для наиболее подготовленных учащихся «по прежнему требуется внимание повышению качества геометрической подготовки»[1]. Понятно, что при столь значимом социальном запросе педагогическая наука не обходит стороной вопрос обучения школьников математике, в частности, геометрии. В научно-методической литературе можно выделить лекции как по обучению задачам[2] [2], так и по обучению отдельным темам стереометрии[3] [3]. Взаимосвязь и отдельные методические аспекты чаще рассматриваются в специально посвященных этому научных статьях. К некоторым из них мы обратимся в основной части нашей статьи, здесь же отметим выполненную в Республике Беларусь статью [4], близкую нам по цели исследования. Мы солидарны с автором в том, что в теоретическом плане следует в процессе решения задачи выделять четыре этапа, организуя соответствующую работу на каждом из них. Так, в названном выше исследовании большое внимание уделяется построению чертежа к геометрической фигуре и составлению задач «в контексте технологии укрупнения дидактических единиц» [4, с. 95]. В нашем же исследовании мы пытаемся каждый этап решения задачи представить законченной структурно-функциональной схемой. Причем в статье делаем это с помощью теоретического обобщения конкретного примера.

Основной целью нашего исследования является разработка теоретически обоснованной методики обучения учащихся решению стереометрических задач на основе планомерного ознакомления с условием, поиска плана решения, реализации этого плана и изучения найденного решения.

---

[1] Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2021 года по математике / И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, А.В. Семенов. — Текст: электронный // ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»: официальный сайт. — 2022. — URL: https://fipi.ru (дата обращения: 25.06.2022).

[2] Методика обучения математике в 2 ч. Часть 1 / Н.С. Подходова [и др.]; под редакцией Н.С. Подходовой, В.И. Снегуровой. — Москва: Юрайт, 2022. — 274 с. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/489760 (дата обращения: 25.06.2022).

[3] Методика обучения математике в 2 ч. Часть 2 / Н.С. Подходова [и др.]; под редакцией Н.С. Подходовой, В.И. Снегуровой. — Москва: Издательство Юрайт, 2022. — 299 с. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/490417 (дата обращения: 25.06.2022).

Для решения поставленной цели следует решить ряд задач: выявить основные этапы работы с математической задачей; определить виды деятельности по решению стереометрической задачи, свойственные каждому этапу; разработать примеры, иллюстрирующие методику работы со стереометрической задачей на каждом этапе.

## Методы исследования

Для решения поставленных задач наиболее актуальными явились следующие методы исследования: изучение и анализ литературы по теме исследования; синтез эмпирического материала; обобщение педагогического опыта преподавателей-практиков и собственного опыта; построение теоретических моделей; эксперимент. Экспериментальная проверка основных положений осуществлялось на занятиях со студентами педагогического вуза в рамках дисциплин «Методика обучения математике», а также «Геометрия» и «Технология подготовки обучающихся к итоговой аттестации по математике».

## Результаты исследования

Процесс решения математической задачи в теоретическом плане можно представить дискретно, поэтапно. В методике обучения математике наиболее распространена схема, в которой отражаются следующие четыре этапа: осмысление условия задачи, составление плана решения задачи, оформление решение и изучение найденного решения. На практике же дискретность шагов, определенная в теоретическом плане, нивелируется. Это и понятно: решение задачи для ученика и учителя — непрерывный процесс. Разбивка же на этапы удобна в теоретическом плане, поскольку даёт удобство в описании действий, адекватных решению задачи. В статье мы пытаемся описать эти действия в своей полной совокупности. Почему лишь «пытаемся»? Дело в том, что использовать в данном случае строго утвердительное предложение считаем неверным, поскольку убеждены, что процесс решения задачи это процесс творческий, который не поддаётся алгоритмизации. В тоже время в процессе решения учащимся математической задачи можно выделить определенные закономерности, которые мы перечисляем и, на наш взгляд, это перечисление можно назвать полным, то есть охватывающим все основные аспекты этапов решения.

Процесс изложения теоретических положений будем вести в контексте решения следующей стереометрической задачи: «В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ отрезок $SO$ — её высота, $SM$ — апофема боковой грани $SCD$. Докажите, если $OH$ перпендикуляр к $SM$, то $OH$ является перпендикуляром к плоскости $SCD$».

### 1. Осмысление условия задачи

Можно считать, что методика работы с задачей на данном этапе разработана, если у ученика складывается ясное представление о поставленной задаче. Здесь следует организовать управляемый процесс осмысления условия задачи, чтобы ученик получил заранее определенный учителем результат, а не такой, какой получился бы у ученика сам собой, может быть и совпадающий с заранее определенным.

Вполне понятно, первое, что надо сделать, это дать ученику возможность познакомиться с текстом задачи. При этом схватывается общая ситуация, описанная в задаче. Как правило, в стереометрических задачах задаётся один или два основных геометрических объекта, и указываются составляющие для одного объекта, либо связи между несколькими геометрическими объектами. Далее требуется выделить условие и заключение задачи. Другими



64PDMN322
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

словами, требуется определить, что дано и что требуется доказать или найти. «Следует иметь в виду, что, как правило, текст (формулировка) задачи дается в свернутом виде. И очень важно, чтобы учащиеся научились развертывать его в систему взаимосвязанных высказываний и требований — высказывательную модель задачи» [5, с. 117]. Для стереометрической задачи такая модель будет представлять собой композицию трёх элементов: рисунок, адекватный условию задачи; отдельно выделенное условие задачи, как правило, предваряемое записью «Дано», и содержащее дискретную совокупность видовых отличий; отдельно выделенное требование задачи, обычно начинающееся со слов «Доказать» или «Найти».

Так, в нашей задаче основная фигура — пирамида, которая является правильной и шестиугольной (видовые отличия, которые учащиеся должны не только указать, но и понимать; особенно первое из названных). В условии задачи также встречается понятие апофемы, которое наряду с «правильной пирамидой» не всегда учащиеся способны верно истолковать. Поэтому следует организовать соответствующую работу по диагностике и предупреждению непонимания условий задачи. В условии задачи указана перпендикулярность *OH* и *SM*, что также следует отнести в «Дано». Заметим, привычная для нас запись условия задачи, когда мы отдельно выделяем «Дано» и «Доказать», очень удачна в методическом плане, поскольку при её выполнении мы реализуем первоначальный анализ задачи — выделяем явно условия и требование.

Рисунок к задаче. С логико-математической точки зрения его выполнение не обязательно, поскольку он играет лишь наглядную функцию при построении доказательных рассуждений. Но именно эта его функция будет полезна как для устойчивого представления условия задачи, так и при поиске плана решения. Поэтому с методической точки зрения рисунок целесообразен. Основное требование к рисунку — это наглядность и верное отображение геометрической конфигурации. При этом допустимы неточности в соотношении длин отрезков, однако другие инварианты, такие как отношение параллельности, и, в особенности, отношение принадлежности должны соблюдаться.

Для рассматриваемой нами задачи рисунок может быть следующим (рис. 1).

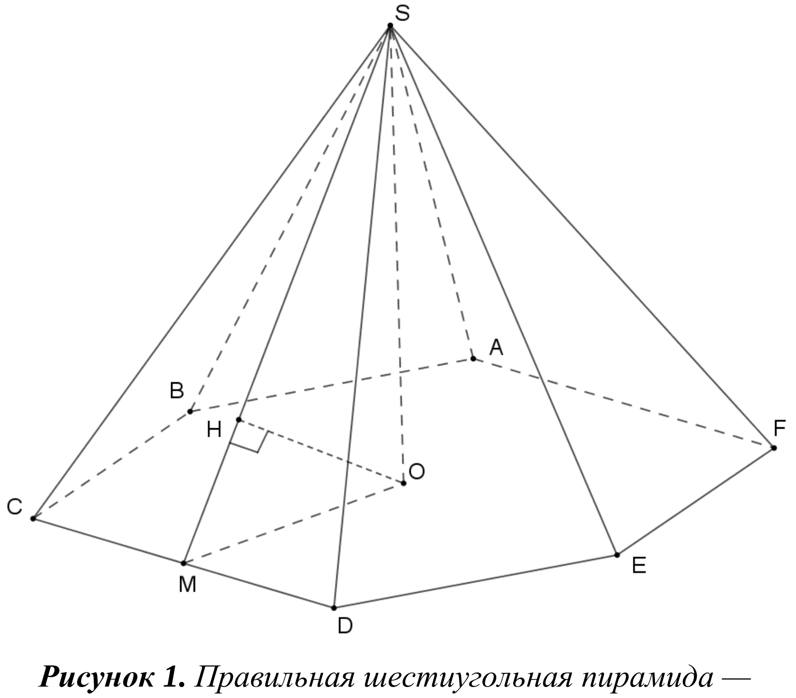


***Рисунок 1.*** *Правильная шестиугольная пирамида — основная фигура исходной задачи (составлено авторами)*

После выполнения рисунка и краткой записи ученику «должна быть понятна словесная формулировка задачи. Проверить это учитель до некоторой степени может; он просит ученика повторить формулировку задачи, и ученик должен оказаться в состоянии легко это сделать. Ученик также должен быть в состоянии указать главные элементы задачи — неизвестное, данное, условие» [6, с. 17].

К процессу создания рисунка полезно привлекать интерактивные средства обучения [7]. В частности, полезным и продуктивным может оказаться применение программы Geogebra [8].

Таким образом, методика работы учителя по осмыслению условия задачи включает руководство последовательностью взаимосвязанных действий учащихся: чтение условия; выявление основной фигуры или комбинации фигур, задаваемых условием; черновое изображение основной фигуры; выявление видовых отличий данной фигуры, перечисляемых в условии, их запись; определение и фиксация в записи требования задачи; необходимая коррекция и чистовой рисунок. Формы работы здесь во многом зависят от уровня подготовки учащихся, а также ролью и месте решаемой задачи в системе обучения школьников математике. Заметим, что если в основной школе, особенно в 5–6 классах, основное внимание учителя акцентируется на формах обучения, то по мере развития школьников и усложнения теоретического материала, акцент в подготовке учителя к урокам математики с подбора форм обучения смещается на отбор содержания обучения. В решении же стереометрической задачи в плане высказанных размышлений будут важны перечисленные выше действия по осмыслению условия задачи.

## 2. Поиск, составление плана решения задачи

Можно считать, что методика работы с задачей на данном этапе разработана, если два разных учителя по предложенной разработке проведут схожие фрагменты уроков (здесь методика подобна сценарию роли для актёра — по одному сценарию два разных актёра сыграют одну и ту же роль, конечно, с некоторыми субъективными особенностями, но роль одну и ту же).

На наш взгляд, в решении задачи это один из сложных этапов. Если деятельность учащихся на предыдущем этапе можно алгоритмизировать, то данный этап вряд ли можно описать в заранее определенной структуре с заведомо определенным результатом. Конечно, для стандартных задач такое возможно, но как быть с поиском решения нестандартных задач? Здесь, как показывают наши исследования [9], размышления ученика приобретают вполне определенную направленность и в большинстве случаев связаны (1) либо с поиском аналогичных задач с уже известным решением и перенесением этого решения на исходную задачу (аналогия); (2) либо с анализом требования задачи (анализ); (3) либо с анализом условия задачи (применение эвристических схем поиска решения задачи).

Первое направление. Аналогия. Общая схема применение аналогии к решению задачи включает ряд этапов: поиск, составление аналогичной задачи; её решение; выявление способа и/или факта в решении аналогичной задачи; перенесение выявленных закономерностей на исходную задачу и, соответственно, решение исходной задачи.

Возникает вопрос, какую задачу считать аналогичной и каким образом её школьнику получить. Ответ на первый вопрос многогранен, поскольку аналогия отражает субъектные взгляды сходства двух и более объектов. Однако в рамках рассматриваемого вопроса можно, взяв за основу структуру задачи, попытаться указать аналогичные задачи. Так, Ю.М. Колягин [11] выделяет в задаче следующие компоненты: *(а)* начальное состояние (*У*) характеризует условие конкретной задачи; *(б)* конечное состояние (*З*) характеризует заключение задачи; *(в)* решение задачи (*Р*) характеризует конкретный способ преобразования условия для получения



64PDMN322
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

требуемого результата; *(г)* базис решения (*O*) характеризует объем теоретических или практических знаний, необходимых для решения задачи. Тогда, если хотя бы по одному из компонентов можно указать сходство, то такие задачи можно назвать аналогичными. Если в основу аналогии положить начальное или конечное состояние задачи, то можно выделить задачи, аналогичные по рассматриваемым в них объектам. Если в основу аналогии положить базис решения или само решение задачи, то можно выделить задачи, аналогичные по методу решения.

Задачи, аналогичные по методу решения, логично предположить, будут группироваться в учебнике вокруг изучения какой-либо темы, теоремы. В нашей задаче требуется доказать перпендикулярность прямой и плоскости. Возьмем школьный учебник геометрии, например, широко распространенный учебник коллектива авторов Л.С. Атанасян и др.[4]. Вторая глава «Перпендикулярность прямых и плоскостей» этого учебника содержит необходимый нам параграф «Перпендикулярность прямой и плоскости». Анализ данного параграфа показывает, что для доказательства нашего утверждения, в первую очередь, надо попытаться воспользоваться признаком перпендикулярности прямой и плоскости: «Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости»[4]. Заметим, что такая попытка даёт одно из возможных решений. Итак, базис решения найден, а это уже существенный результат. Дальнейшую возможную реализацию этого направления мы рассмотрим в статье позже при восходящем анализе в поиске плана решения, а также при выявлении на четвертом этапе других способов решения. Здесь же вернёмся к обсуждению вопроса поиска аналогичных задач.

В рассуждениях, описанных выше, ведущая роль может принадлежать как учителю, так и учащимся. Однако подобрать задачу, в которой будет использоваться тот же метод решения, для ученика довольно трудно. Здесь имеются и объективные причины: внешне не схожие задачи могут иметь одинаковые методы решения. Поэтому, реализуя данное направление, учитель может указывать на необходимость рассмотрения тех или иных задач. Так, можно предложить для анализа задачи: «129. Прямая $AM$ перпендикулярна к плоскости квадрата $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке $O$. Докажите, что: (а) прямая $BD$ перпендикулярна к плоскости $AMO$; (б) $MO \perp BD$»[4]; «131. В тетраэдре $ABCD$ точка $M$ — середина ребра $BC$, $AB = AC$, $DB = DC$. Докажите, что плоскость треугольника $ADM$ перпендикулярна к прямой $BC$»[4].

Задачи, аналогичные по рассматриваемым в них объектам, могут подбирать сами учащиеся. Так, в нашей задаче основным объектом является правильная пирамида. Представляется, что ученики способны сами вычленить в учебнике в параграфе «правильная пирамида» аналогичную задачу: «260. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ через боковое ребро $DC$ и высоту $DO$ пирамиды проведена плоскость $\alpha$. Докажите, что: (а) ребро $AB$ перпендикулярно к плоскости $\alpha$; (б) перпендикуляр, проведенный из вершины $C$ к апофеме грани $ADB$, является перпендикуляром к плоскости $ADB$»[4].

Методика применения метода аналогии будет вариативна в зависимости от того, имеется ли решение аналогичной задачи или нет. При наличии решения, которое ученику понятно, уместно по возможности перенести решение на исходную задачу. Если же решение аналогичной задачи отсутствует, то целесообразно искать решение сразу для аналогичных задач вместе. Некоторые аспекты применения метода аналогии при решении стереометрических задач можно встретить в статьях, например [12; 13].

---

[4] Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы: учебник для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровни / Л.С. Атанасян и др. — 7-е изд., перераб. и доп. — М.: Просвещение, 2019. — 287 с.

Вторе направление. Анализ. В данном случае, отправляясь от заключения и опираясь на известные положения, следует показать, что заключение является логическим следствием условия. «При восходящем анализе ведущим вопросом является: что надо знать, чтобы ответить на поставленный вопрос? Таким образом, для доказываемого утверждения последовательно подбирают достаточные основания, от следствия «восходят» к основанию» [14, с. 119].

Нам требуется доказать перпендикулярность прямой *OH* и плоскости *SCD*, обозначим её через α. Для этого можно воспользоваться соответствующим признаком и тогда будет достаточно показать что наша прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости. Перпендикулярность для одной прямой ($OH \perp SM$) задана по условию. Найдем в плоскости α еще одну прямую, перпендикулярную нашей прямой *OH*, причем такую, для которой обоснование перпендикулярности не будет сложным. Очевидно, что целесообразно показать $OH \perp CD$. Покажем, что $CD \perp OH$ (математически утверждения $OH \perp CD$ и $CD \perp OH$ эквивалентны, а субъективно воспринимаются по-разному). Для этого достаточно показать, что прямая *CD* перпендикулярна плоскости *SOM*, в которой лежит *OH*. Для доказательства указанной перпендикулярности достаточно доказать на выбор два из трёх условий $CD \perp SM$, $CD \perp OM$, $CD \perp SO$. Первое из этих условий изначально задано, второе следует из рассмотрения равностороннего треугольника *ODC*, третье — из того что высота пирамиды *SO* перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости основания пирамиды. Схематически описанный поиск решения может быть оформлен в виде графа (рис. 2).

$$OH \perp (SCD) \equiv \alpha$$

$OH \perp SM$
(по условию)

$$OH \perp CD$$

$$CD \perp OH$$

$$CD \perp (SOM)$$

$CD \perp SM$
(по условию)

$CD \perp OM$
(из равнобедренного $\Delta OCD$)

$CD \perp SO$
(по определению высоты пирамиды)

***Рисунок 2.*** *Схематичная запись результата восходящего анализа (составлено авторами)*

Третье направление. Эвристики. Можно назвать несколько наиболее часто используемых эвристических приёмов: разбиение задачи на подзадачи, метод преобразования задачи, метод моделирования, введение вспомогательных элементов [5, с. 138–156], приём элементарных задач, представление задачи в пространстве состояний, рассмотрение предельного случая, приём вспомогательной фигуры [10, с. 106–113].

Обычно эвристические схемы поиска плана решения используются для нестандартных более сложных задач, чем в нашем случае. Однако некоторые эвристические приёмы могут помочь в плане поиска решения. Рассмотрим два: метод преобразования задачи и приём рассмотрения предельного случая.

Метод преобразования задачи состоит в том, что задачу преобразуют, но, не меняя язык, на котором она была сформулирована. Для этого «отбросим лишнее» в условии и сфокусируемся на значимых связях и отношениях. В нашем случае несложно заметить, что для анализа и поиска решения рассматривается определенная часть правильной пирамиды, заданной в условии исходной задачи. А именно, только одна грань пирамиды (равнобедренный треугольник *SCD*) и её проекция (тоже равнобедренный треугольник *OCD*). Поэтому, отбрасывая несущественные факторы, получаем, что основной фигурой является пирамида *SOCD*, в которой высота *SO* восставлена из вершины *O* равнобедренного треугольника *OCD*, лежащего в ее основании (рис. 3). Для данной пирамиды известно также, что $SC = SD$, $SM \perp CD$, $OH \perp SM$. Требуется доказать перпендикулярность *OH* и плоскости *SCD*. В таком случае получаем довольно типичную ситуацию — стандартную задачу о нахождении перпендикуляра к плоскости.

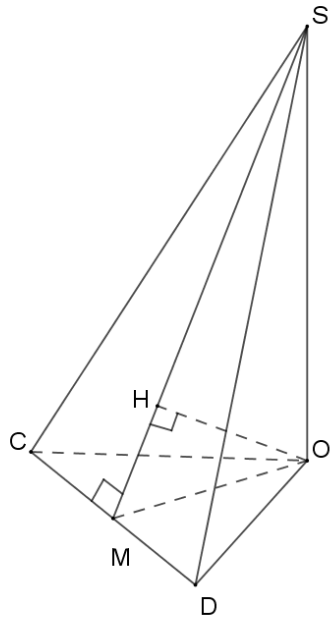


***Рисунок 3.*** *Пирамида SOCD — преобразованный чертеж к исходной задаче (составлено авторами)*

Рассмотрение предельного случая (специализация, метод конкретизации) заключается в том, что мы от рассмотрения общего переходим к исследованию менее общего или же к рассмотрению одного частного случая. Для этого частного случая и ищется решение. Понятно, что такое решение не может быть дословно перенесено на исходную задачу, однако идея или полученный факт могут «подсказать, в каком направлении следует искать доказательство» [6, с. 191]. Для нашей задачи можно представить (и при необходимости сделать чертёж) частный случай, когда точка *H* будет серединой отрезка *SM*, т. е. прямоугольный треугольник *SOM* становится еще и равнобедренным (рис. 4).

Такое отношение позволяет воображению легко конструировать образ рассматриваемого объекта: плоскость треугольника *SOM* перпендикулярна плоскости треугольника *SCD*. При этом *OH* является перпендикуляром, проведенным в одной плоскости *SOM* к линии пересечения *SM* перпендикулярных плоскостей *SOM* и *SCD*. А это, как известно, влечёт вывод, что *OH* является перпендикуляром к плоскости *SCD*. Таким образом, идея решения исходной задачи найдена: изначально следует показать перпендикулярность плоскостей *SOM* и *SCD*, а далее решение очевидно.

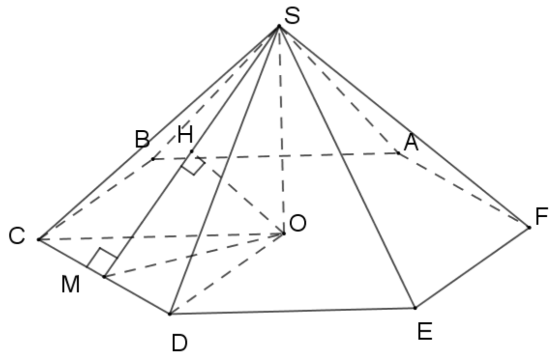


***Рисунок 4.*** *Правильная шестиугольная пирамида (SO = MO) — частный случай исходной задачи (составлено авторами)*

Рассмотренный частный случай может дать направление и для других размышлений. Так, в треугольнике *SCD* через точку *H* проводим прямую параллельную *CD* — получаем среднюю линию равнобедренного треугольника. Концы этой средней линии совместно с точкой *O* образуют равнобедренный треугольник, в котором *OH* — медиана, а, следовательно, и высота. То есть нашли в плоскости *SCD* вторую прямую (помимо данной по условию), к которой будет перпендикулярен отрезок *OH*. Таким образом, идея решения исходной задачи снова найдена: изначально следует в плоскости боковой грани *SCD* через точку *H* провести прямую параллельную *CD* и показать, что *OH* будет перпендикуляром к этой прямой. Конечно, такое решение будет более длинное, но имеет место быть. Заметим, что авторами статьи подобное решение встречалось в работах учащихся, и по предположению было отнесено к избыточной трактовке признака перпендикулярности прямой и плоскости, содержащего дополнительное условие: «Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, и проходит через точку их пересечения, то она перпендикулярна к этой плоскости». Это утверждение верно.

Таким образом, приём поиска плана решения не может быть представлен заранее определённой последовательностью действий учащегося. Однако составляющие этого приёма в большинстве случаев предопределены. Это аналогия, анализ (размышления от заключения), синтез (размышления от условия — эвристики). Эти три направления, как мы показали выше, непосредственно следуют высказывательной модели задачи, составляемой на первом этапе работы с задачей. Учителю на первых порах обучения учащихся решению задач следует на основе методического анализа[5] определить ведущее направление в поиске плана решения. Затем направлять деятельность учащихся в этом направлении. По мере же освоения школьниками каждого из указанных направлений руководящая роль учителя уменьшается при возрастании самостоятельности учащихся.

### 3. Реализация намеченного плана. Оформление решения

После того, как идея найдена, план решения составлен, приступаем к его реализации — оформлению решения. Каким оно должно быть? Насколько подробным? Можно встретить различные образцы и требования. Так, в школьном учебнике геометрии практически все доказательные рассуждения приводятся логически сплошным текстом. На уроке же

[5] Методика обучения математике. Практикум: учебное пособие для вузов / В.В. Орлов [и др.]; под редакцией В.В. Орлова, В.И. Снегуровой. — М.: Юрайт, 2021. — С. 106.

математики учитель часто требует от учащихся записывать доказательство по пунктам. Говоря научным языком, учитель требует оформлять решение задачи в виде последовательности силлогизмов, выделяя в каждом силлогизме большую посылку (БП), малую посылку (МП) и вывод (В). Также можно встретить оформление доказательства в виде таблицы, содержащей столбцы «вывод» и «обоснование вывода». Все перечисленные способы возможны. Выбор одного конкретного из них, на наш взгляд, определяется поставленными целями. Однако какой бы способ мы не выбрали, «решение должно быть математически грамотным и полным, из него должен быть понятен ход рассуждений учащегося»[6].

Решение, оформленное в виде силлогизмов, позволяет представить доказательные рассуждения в некоторой логической последовательности и наиболее полно. Аналогичное можно сказать и о представлении решения в виде таблицы. Заметим, на уроках математики мы рекомендуем к записи полную форму силлогизма, «явно выделяя три его части: большую посылку, малую посылку и вывод. Это будет способствовать видению учащимся потенциальных противоречий, недосказанности в решении и, как следствие, недопущению возможных ошибок» [15, с. 56].

Для нашей задачи оформление решения в форме силлогизмов может выглядеть следующим образом:

1. $SM$ — медиана, т. к. $\Delta SCD$ — равнобедренный, $SM$ — высота (на основании теоремы-свойства: в равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой).
2. $OM$ — высота, т. к. $\Delta OCD$ — равнобедренный, $OM$ — медиана (на основании теоремы-свойства: в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является высотой).
3. $CD \perp SOM$, т. к. $CD \perp SM$, $CD \perp OM$, $SM$ и $OM$ пересекаются в плоскости $SOM$ (на основании теоремы-признака: если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости).
4. $CD \perp OH$, т. к.$CD \perp SOM$, $OH \in SOM$ (на основании определения: прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости).
5. $OH \perp SCD$, т. к. $OH \perp SM$, $OH \perp CD$, $SM$ и $CD$ пересекаются в плоскости $SCD$ (на основании теоремы-признака: если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости); и т. д.

Решение, оформленное логически сплошным текстом, не предусматривает выделение отдельных шагов; всё доказательство представляет собой рассуждение, которое записывается отдельными предложениями в одном или нескольких абзацах. Такая форма более компактна, и при умелом изложении удобна для восприятия. Неслучайно подобным образом оформляется доказательство теорем в школьных учебниках. Однако представить доказательство грамотным текстом — довольно непростая задача, требующая знаний и опыта. Трудности обуславливаются как субъективными, так и объективными причинами: требуется знание предмета, осознанное видение описываемой ситуации; большинство предложений

[6] Методические материалы для предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ОГЭ 2022 года. Математика // А.В. Семенов, М.А. Черняева. — Текст: электронный // ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»: официальный сайт. — 2022. — URL: https://fipi.ru (дата обращения: 25.06.2022).

формулируются в категорической форме, в то время как учащимся более доступна условная форма; стремление к лаконичности изложения при соблюдении обоснованности.

Для нашей задачи оформление решения логически сплошным текстом может выглядеть следующим образом:

Так как $\Delta SCD$ равнобедренный ($SC = SD$) и $SM \perp CD$, то $M$ — середина $CD$. Поскольку $\Delta OCD$ равносторонний и $OM$ — медиана, следовательно, $OM$ — высота, то есть $OM \perp CD$. Тогда прямая $CD$ перпендикулярна плоскости $SMO$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Но тогда по определению перпендикулярности прямой и плоскости $CD \perp OH$. Наконец, по условию $OH \perp SM$. Итак, прямая $OH$ перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости $SMD$. Значит, она перпендикулярна этой плоскости.

Таким образом, на начальных этапах обучения оформлению решения задачи следует требовать от учащихся развернутого оформления, используя полную форму силлогизма или оформление решения в виде таблицы. При этом, на наш взгляд, прогресс будет наблюдаться в сокращении числа силлогизмов за счет выявления основных, значимых для задачи и сокращением второстепенных, очевидных. Оформление же решения логически сплошным текстом не считаем более высоким уровнем продвижения, поскольку такой текст строится на тех же силлогизмах, однако обличённых в некоторую стилистическую форму.

## 4. Изучение найденного решения

Наши наблюдения показывают, что на практике данный этап зачастую не реализуется. Учащиеся после получения ответа теряют интерес к задаче, и возобновить его для учителя является непростой задачей.

Между тем, ценность решения математической задачи во многом определяется не получением какого-либо факта (для абсолютного большинства школьных задач он априори установлен), а приобретением опыта деятельности по получению данного факта. Также для некоторых типов математических задач такие действия, как проверка, исследование задачи, при каких условиях задача имеет решение и сколько различных в каждом случае, формулировка ответа, являются необходимыми.

В нашем случае с логико-математической точки зрения проверка решения не требуется. При этом в доказательстве мы опирались только на отношения перпендикулярности и принадлежности, а числовые данные не использовали, поэтому можно заключить, что задача всегда имеет решение и это решение не зависит от того, насколько высота правильной пирамиды будет больше/меньше стороны основания. Запись ответа не требуется.

С методической точки зрения полезно реализовать действия, отнесенные нами к познавательным составляющим данного этапа: «(1) исследование задачи и хода ее решения (выявление идеи решения, связи с другими задачами); (2) поиск и осуществление новых способов решения задачи; (3) формулирование и решение задач на основе исходной» [9, с. 122]. Покажем реализацию данных действий по отношению к рассматриваемой задаче.

Во-первых, основное, что используется в задаче — это признак перпендикулярности прямой и плоскости. И именно подведение представленной ситуации под этот признак и является основной идеей, лежащей в решении. Причем в представленном оформлении решения этот признак использовался дважды. Здесь следует отметить и типичную ошибку, которую допускают некоторые учащиеся. Так, припоминая определение «прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости», учащиеся представляют ошибочную запись: «Так как $OH \perp SM$, а $SM \in SCD$, то $OH \perp SCD$». Описание



64PDMN322
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

данной и других типичных ошибок, а также пути их преодоления можно встретить в научных статьях, например [16].

Во-вторых, для нашей задачи можно найти и другие способы решения. Укажем некоторые.

Альтернативное решение 1. Применяется способ, в котором используется теорема о трёх перпендикулярах для обоснования перпендикулярности *CD* и плоскости *SOM*.

Наклонная *SM* перпендикулярна прямой *CD*, лежащей в плоскости основания пирамиды. Следовательно, по теореме о трех перпендикулярах, её проекция *OM* также перпендикулярна прямой *CD*. Тогда прямая *CD* перпендикулярна плоскости *SMO* по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Но тогда по определению перпендикулярности прямой и плоскости $CD \perp OH$. Наконец, по условию $OH \perp SM$. Итак, прямая *OH* перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости *SMD*. Значит, она перпендикулярна этой плоскости.

Альтернативное решение 2. Векторный метод решения. Заметим, «решение одной задачи различными способами, например координатно-векторным методом, в сочетании с другими дает возможность показать учащимся одну из эстетических граней математики» [17, с. 1].

Рассмотрим три вектора $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{OS}$ (рис. 5) Нетрудно видеть, что эти векторы попарно взаимно перпендикулярны. Поэтому скалярное произведение любой пары этих векторов равно нулю. Так как векторы $\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OS}$ компланарны, то $\overrightarrow{OH} = \alpha\,\overrightarrow{OM} + \beta\,\overrightarrow{OS}$ . Пусть $\vec{a}$ — произвольный вектор параллельный плоскости *SCD*. В силу компланарности векторов $\vec{a}, \overrightarrow{SM}, \overrightarrow{CD}$ имеем равенство $\vec{a} = x\,\overrightarrow{CD} + y\,\overrightarrow{SM}$. Найдем скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{OH} = \left(x\,\overrightarrow{CD} + y\,\overrightarrow{SM}\right) \cdot \overrightarrow{OH} = x\left(\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OH}\right) + y\left(\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{OH}\right) = x\left(\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OH}\right) =$$

$$= x\left(\overrightarrow{CD} \cdot \left(\alpha\overrightarrow{OM} + \beta\overrightarrow{OS}\right)\right) = \alpha x\left(\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OM}\right) + \beta y\left(\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OS}\right) = 0.$$

Следовательно, $\overrightarrow{OH}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$. Так как вектор $\vec{a}$ — произвольный вектор, параллельный плоскости *SCD*, то отрезок *OH* перпендикулярен этой плоскости.

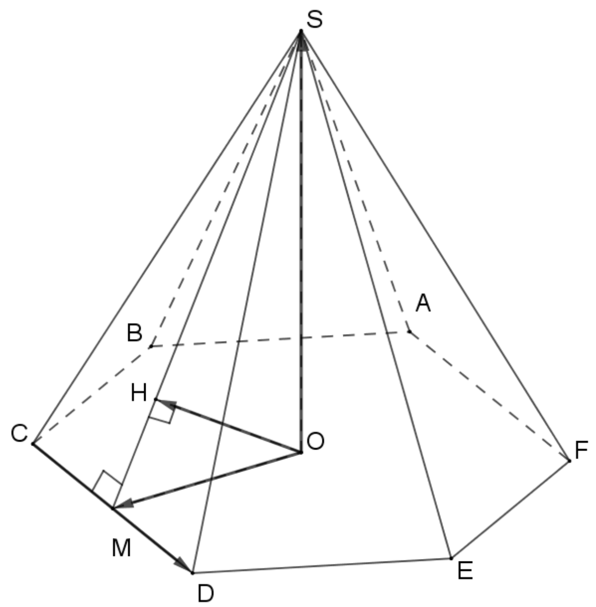


***Рисунок 5.*** *Векторы в правильной шестиугольной пирамиде (составлено авторами)*

Альтернативное решение 3. Основано на доказательстве о совпадении длины отрезка *OH* с длиной высоты тетраэдра *OSCD*.

Пусть сторона основания пирамиды равна $a$, а высота пирамиды $h$. По теореме Пифагора найдем, что $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}a, SM = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + h^2}$. Из подобия треугольников $\Delta SOM \sim \Delta MOH$ находим $\frac{OH}{OS} = \frac{OM}{SM}$, следовательно, $OH = \frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2+4h^2}}$. Найдем теперь расстояние от точки $O$ до плоскости *SCD*. Очевидно, что оно равно высоте $H$ тетраэдра *OSCD*, проведенной из вершины *O*. Значит

$$H = \frac{3\,V}{S_{\Delta SCD}} = \frac{S_{\Delta COD} \cdot SO}{\frac{1}{2}CD \cdot SM} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 h}{\frac{1}{2}a \cdot \sqrt{\frac{3}{4}a^2+h^2}} = \frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2+4h^2}} = OH.$$

Поэтому отрезок *OH* перпендикулярен плоскости *SCD*.

В-третьих, на основе решенной задачи можно составить и некоторые другие задачи. Данный вид деятельности для большинства школьников является непривычным, а отсюда и сложным. Поэтому учителю, предлагающему учащимся составить задачи, следует сначала определиться с целью этой деятельности, и только после этого не просто предлагать учащимся составить какие-либо задачи на основе решенной, а указывать при этом определенные требования к вновь составленным задачам. Так, например, в статье [18] рассматривается развитие умения школьников планировать свои действия при решении стереометрических задач. В статье [19] говорится о возможности развития пространственного мышления школьников.

Приведем несколько примеров составления задач на базе исходной.

Для осознанного усвоения идеи решения задачи можно предложить учащимся составить или подобрать задачу, в которой основной фигурой будет фигура, отличная от правильной шестиугольной пирамиды, однако в решении должен использоваться признак перпендикулярности прямой и плоскости. Результатом может быть такая задача: «В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* отрезок *SO* — её высота, *SM* — апофема боковой грани *SCD*. Докажите, если *OH* перпендикуляр к *SM*, то *OH* является перпендикуляром к плоскости *SCD*».

Для закрепления метода решения задачи можно предложить внести (изменить, изъять) числовые данные. Результатом может быть такая задача: «В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* отрезок *SO* — её высота, *SM* — апофема боковой грани *SCD*. Докажите, если *OH* перпендикуляр к *SM*, то *OH* является перпендикуляром к плоскости *SCD*. Найдите расстояние от точки *O* до плоскости *SCD*, если *SO* = 4, *OM* = 3».

Для отработки навыка по применению определенного метода решения задачи можно предложить преобразовать её условие так, чтобы было удобно использовать какое-либо обоснование или метод решения. Например, преобразуйте условие задачи так, чтобы её решение координатно-векторным методом не приводило к громоздким вычислениям. Результатом может быть такая задача: «В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* отрезок *SO* — её высота, *SM* — апофема боковой грани *SCD*. Высота пирамиды равна радиусу окружности, вписанной в её основание. Докажите, если *OH* перпендикуляр к *SM*, то *OH* является перпендикуляром к плоскости *SCD*».

Для включения задачи и метода её решения в систему задач можно предложить найти задачу с сохранением метода её решения, однако, с изменённым условием и/или требованием задачи. В результате может быть представлена такая задача: «В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки *B* до плоскости $AB_1C$» [20, с. 23].

Таким образом, на данном этапе со стороны ученика необходимо выполнить проверку решения, исследовать, все ли возможные ситуации рассмотрены в решении, и записать ответ. Со стороны учителя полезно организовать познавательный анализ решения: выявление идеи, связи с другими задачами, нахождение других способов решения, составление аналогичных задач.

### Заключение

В процессе исследования, на наш взгляд, поставленные задачи решены.

Научную новизну исследования мы видим, прежде всего, в том, что в нем предложена методика обучения решению стереометрических задач на уровне видов деятельности учащихся, соответствующих этапам решения математической задачи.

Теоретическая значимость определяется установлением связей между этапами решения математической задачи, в общем, и составляющими этих этапов, адаптированными для стереометрической задачи.

Практическая значимость определяется тем, что представленные материалы могут использоваться преподавателями учреждений высшего и среднего профессионального образования в рамках дисциплин предметной и общепрофессиональной подготовки, в частности, дисциплины «Методика обучения математике». Также материалы статьи могут быть положены в основу разработки уроков учителями математики по обучению решению стереометрических задач.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Далингер, В.А. Методика обучения стереометрии посредством решения задач / В.А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Юрайт, 2022. — 370 с. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/492896 (дата обращения: 25.06.2022).
2. Ястребов, А.В. Методика преподавания математики: задачи / А.В. Ястребов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Юрайт, 2022. — 201 с. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/491361 (дата обращения: 25.06.2022).
3. Капкаева, Л.С. Теория и методика обучения математике: частная методика в 2 ч. Часть 2 / Л.С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2022. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/493011 (дата обращения: 29.06.2022).
4. Устименко, В.В. Методика решения стереометрических задач / В.В. Устименко, Е.С. Воскобойникова // Веснiк Вiцебскага дзяржаўнага унiверсiтэта [Вестник Витебского государственного университета]. — 2022. — № 1(114). — С. 92–97.
5. Фридман, Л.М. Теоретические основы методики обучения математике / Л.М. Фридман. — М.: URSS, 2021. — 248 с.
6. Пойа, Д. Как решать задачу / Д. Пойа. — М.: Учпедгиз, 1959. — 208 с.
7. Косарев, А.Н. Применение интерактивных методов при обучении школьников решению стереометрических задач / А.Н. Косарев // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. — 2014. — № 10. — С. 185–188.

8. Савченко, Н.А. Применение программы Geogebra для решения стереометрических задач / Н.А. Савченко, А.С. Смирнова // Вопросы педагогики. — 2022. — № 3–2. — С. 213–217.
9. Костюченко, Р.Ю. Методика обучения учащихся решению математических задач: содержание этапов решения / Р.Ю. Костюченко // Вестник Сибирского института бизнеса и информационных технологий. — 2018. — № 4(28). — С. 117–123.
10. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике в средней школе / Г.И. Саранцев. — М.: Просвещение, 2002. — 224 с.
11. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. В 2-х частях: Ч. 1. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся / Ю.М. Колягин. — М.: Просвещение, 1977. — 112 с.
12. Костюченко, Р.Ю. Обучение учащихся аналогии в процессе решения геометрических задач / Р.Ю. Костюченко, Н.А. Юдина // Современные проблемы науки и образования. — 2011. — № 6. — С. 176.
13. Кузовлева, А.С. Опыт обучения методу аналогии при решении стереометрических задач / А.С. Кузовлева // Вестник Таганрогского института имени А.П. Чехова. — 2017. — № 1. — С. 232–238.
14. Епишева, О.Б. Общая методика обучения математике в средней школе / О.Б. Епишева. — Тобольск: Изд-во ТГПИ им. Д.И. Менделеева, 2008. — 202 с.
15. Костюченко, Р.Ю. Развернутое оформление решения задачи как фактор недопущения логических ошибок / Р.Ю. Костюченко // Международный научно-исследовательский журнал. — 2021. — № 4–3(106). — С. 54–57. — DOI 10.23670/IRJ.2021.106.4.073.
16. Бронникова, Л.М. Типичные ошибки при решении задачи 16 участниками ЕГЭ по математике профильного уровня в Алтайском крае и пути их преодоления / Л.М. Бронникова, И.В. Кисельников, О.А. Тыщенко // Современные проблемы науки и образования. — 2015. — № 5. — С. 564.
17. Вергазова, О.Б. Применение координатно-векторного метода решения стереометрических задач в процессе подготовки к ЕГЭ по математике (профильный уровень) / О.Б. Вергазова // Научно-методический электронный журнал Концепт. — 2017. — № 1. — С. 153–162.
18. Фам Тхи Зьеу Тху. Развитие умения планировать действия по решению стереометрических задач у учащихся школ Вьетнама / Фам Тхи Зьеу Тху // Научное мнение. — 2014. — № 11–2. — С. 113–117.
19. Санина, Е.И. Развитие пространственного мышления в процессе обучения стереометрии / Е.И. Санина, О.А. Гришина // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Психология и педагогика. — 2013. — № 4. — С. 99–102.
20. Балаян, Э.Н. Геометрия: задачи на готовых чертежах для подготовки к ЕГЭ: 10–11 классы / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д: Феликс, 2013. — 217 с.

**Kuzmin Sergey Gennadievich**
Omsk State Pedagogical University, Omsk, Russia
E-mail: kusegen@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6984-885X
RSCI: https://www.elibrary.ru/author_profile.asp?id=693799

**Kostyuchenko Roman Yurevich**
Omsk State Pedagogical University, Omsk, Russia
E-mail: kryu@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7763-0631
RSCI: https://www.elibrary.ru/author_profile.asp?id=353756

# The stages of solving stereometric problems as the basis of the methodology of teaching schoolchildren to solve them

**Abstract.** The article deals with the issue of the method of solving stereometric problems in the school course of mathematics. People have been solving mathematical problems for a long time, however, the inclusion of a student with his personal knowledge, skills, and psychological characteristics in the process of solving them has become the subject of research only in the last century. Problems in geometry, in particular in stereometry, are more difficult for students than in other sections of school mathematics. It is clear that both teachers in practice and scientists in theoretical research are looking for ways to improve the learning process for solving stereometric problems. However, the results of the final certification indicate the need to improve the methodology of teaching geometry. Therefore, based on the analysis of scientific and methodological literature, observation, generalization, we consider a four-stage model of teaching schoolchildren to solve stereometric problems. This model includes such stages of working with the task as familiarization with the condition, search for a solution plan, implementation of this plan and cognitive analysis. Within the framework of the article under consideration, the presentation is based on a stereometric problem. At the same time, despite the uniqueness of the original problem, the authors build theoretical generalizations by types of activities adequate to each stage of solving the stereometric problem. A certain advantage can be considered that in the article these types of activities are described in their entirety. Here the completeness property is understood as the logical completeness of the enumeration. The above determines the theoretical significance of the conducted research. At the same time, from a practical point of view, the material of the article will be of interest to practical teachers, since on the basis of its text it becomes possible to develop lessons on teaching schoolchildren to solve stereometric problems.

**Keywords:** methods of teaching mathematics; stereometric problem; problem solving; stages of problem solving; search for a solution plan; proof design; cognitive analysis; task compilation