Интернет-журнал «Мир науки» ISSN 2309-4265 http://mir-nauki.com/

2017, Том 5, №3 (май – июнь) http://mir-nauki.com/vol5-3.html

URL статьи: http://mir-nauki.com/PDF/44PDMN317.pdf

Статья опубликована 17.07.2017

Ссылка для цитирования этой статьи:
Кириллова Д.А., Одоевцева И.Г. «Задача о часах» как средство формирования научного мировоззрения при обучении математике // Интернет-журнал «Мир науки» 2017, Том 5, №3 http://mir-nauki.com/PDF/44PDMN317.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 372.851, 37.025.7

Кириллова Дина Александровна
ФГБОУ ВО «Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема», Россия, Биробиджан[1]
Доцент кафедры «Информационных систем, математики и методик обучения»
Кандидат физико-математических наук
E-mail: dina_kir_03@mail.ru
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=622640

Одоевцева Ирина Геннадьевна
ФГБОУ ВО «Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема», Россия, Биробиджан
Старший преподаватель кафедры «Информационных систем, математики и методик обучения»
E-mail: dichenko-irina@list.ru
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=565779

«Задача о часах» как средство формирования научного мировоззрения при обучении математике

Аннотация. В данной статье рассматривается проблема формирования научного мировоззрения у учащихся и студентов средствами математических дисциплин. Основная идея работы заключается в том, что ознакомление обучающихся с математикой как определенным методом миропознания, формирование понимания диалектической взаимосвязи математики и действительности способствуют миропониманию, вносят существенный вклад в формирование общей культуры личности. В качестве одной из таких мировоззренческих категорий выделяется время, понимание непрерывности течения времени и, соответственно, непрерывности процессов, протекающих во времени.

Основное содержание статьи составляет анализ одной задачи, призванной помочь формированию у обучающихся понимания непрерывности течения времени. Рассмотренная задача и предложенные способы ее решения могут стать одним из средств формирования научного мировоззрения школьников и студентов при обучении математики.

Ключевые слова: научное мировоззрение; непрерывность; задача; обучение математике

Изменения, пронизывающие все уровни Российского образования в последние десятилетия, включают в себя, в том числе, и гуманитаризацию содержания образования. То есть, ориентацию образования не столько на знания, умения и навыки, сколько на личность и жизнедеятельность обучающихся. Важнейшим же элементом направленности личности является мировоззрение, представляющее собой «совокупность знаний, убеждений и взглядов

[1] 679015, Еврейская автономная область, г. Биробиджан, ул. Широкая, д. 70а

на природу и общество, происходящие в нем события, мировоззрение определяет жизненные стремления, характер и содержание потребностей, мотивы деятельности» [1].

Научным называют мировоззрение, опирающееся на научно установленное и объективное знание о мире. Существенными признаками научного мировоззрения являются: а) наличие обобщенной, научно обоснованной системы представлений, мыслей, взглядов на природу, общество и мышление; б) убежденность в истинности этих взглядов; в) руководствование ими во всей своей деятельности как принципами для принятия решения и своего поведения, как опорой мышления [5].

Проблема формирования научного мировоззрения у учащихся и студентов была и остается одной из актуальных. Несомненно, что гуманитарные дисциплины в процессе обучения несут значительную мировоззренческую нагрузку, но мировоззрение воспитывается не только на уроках гуманитарного цикла. В действительности, каждый предмет школьного обучения обладает своими неповторимыми возможностями для развития и раскрытия, по крайней мере, некоторых аспектов научного мировоззрения. Физики и химики делают это, раскрывая тайны строения материи, биологи – изучая закономерности живой природы, астрономы – демонстрируя устройство Вселенной. Огромные возможности имеет и математика [3; 4].

На необходимость и важность формирования научного мировоззрения в процессе обучения математике указывали Б.В. Гнеденко [3], А.Л. Жохов [4], Т.А. Иванова [5], И.Е. Карелина [6], Д.А. Татаринов [10] и др. Роль математики в формировании научного мировоззрения исследовалась в работах таких признанных авторитетов математического образования, как В.Г. Болтянский, Г.Д. Глейзер, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев, Ю.М. Колягин, Г.И. Саранцев, Л.М. Фридман, А.Я. Хинчин.

Усвоение обучающимися математических знаний, само по себе, автоматически не является определяющим в формировании мировоззрения. Необходимо в математических понятиях и утверждениях систематически выделять мировоззренческие аспекты. Ознакомление школьников с математикой как определенным методом миропознания, формирование понимания диалектической взаимосвязи математики и действительности способствуют миропониманию, вносят существенный вклад в формирование общей культуры личности.

В качестве основных средств формирования научного мировоззрения в процессе обучения математике Б.В. Гнеденко выделяет: беседы по философским вопросам математики, раскрывающие происхождение математических понятий; ознакомление учащихся с основными моментами истории математики и математических открытий; решении прикладных и практических задач [3]. Ниже, на конкретном примере проиллюстрируем, как через математическое содержание реализовать одну из главных задач использования воспитательного потенциала математики: формирование у обучающихся научного мировоззрения.

Одной из мировоззренческих категорий является время, понимание непрерывности течения времени и, соответственно, непрерывности процессов, протекающих во времени. Л.Н. Толстой в романе-эпопее «Война и мир» рассуждал об этом так: «Для человеческого ума непонятна абсолютная непрерывность движения. Человеку становятся понятны законы, какого бы то ни было движения только тогда, когда он рассматривает произвольно взятые единицы этого движения. Но вместе с тем из этого-то произвольного деления непрерывного движения на прерывные единицы проистекает большая часть человеческих заблуждений.

Известен так называемый софизм древних, состоящий в том, что Ахиллес никогда не догонит впереди идущую черепаху, несмотря на то, что Ахиллес идет в десять раз скорее черепахи: как только Ахиллес пройдет пространство, отделяющее его от черепахи, черепаха пройдет впереди его одну десятую этого пространства; Ахиллес пройдет эту десятую, черепаха пройдет одну сотую и так далее до бесконечности. Задача эта представлялась древним неразрешимою. Бессмысленность решения (что Ахиллес никогда не догонит черепаху) вытекала из того только, что произвольно были допущены прерывные единицы движения, тогда как движение и Ахиллеса и черепахи совершалось непрерывно.

Принимая все более и более мелкие единицы движения, мы только приближаемся к решению вопроса, но никогда не достигаем его. Только допустив бесконечно-малую величину и восходящую от нее прогрессию до одной десятой и взяв сумму этой геометрической прогрессии, мы достигаем решения вопроса» (Том 6, часть 3).

У большинства обучающихся отсутствует понимание непрерывности течения времени, об этом свидетельствуют результаты решения следующей задачи, предложенной на олимпиаде по математике школьникам и студентам младших курсов (лишь 15% правильно решили ее) [9].

Задача: ***Сегодня утром собираясь на работу, я заметил, что минутная и часовая стрелки часов совпали между 6 и 7 часами. Интересно, какое точное время показывали эти часы?*** [8]

Приведем пример одного из решений школьников. За 60 минут – минутная стрелка успевает описать целую окружность – 360^0, значит за 1 минуту она двигается на 6^0. Часовая стрелка за 60 минут описывает дугу окружности в 30^0, следовательно, за 1 минуту – $0{,}5^0$. Стрелки совпали между 6 и 7 часами, т.е. нас интересует интервал между 6 ч. 30 мин. и 6 ч. 35 мин.

Будем считать 6.30 началом отсчета, в это время угол между часовой и минутной стрелкой был 15^0.

время	Поворот часовой стрелки	Поворот минутной стрелки
6.30	15^0	0^0
6.31	$15{,}5^0$	6^0
6.32	16^0	12^0
6.33	$16{,}5^0$	18^0

Ответ учащегося: стрелки совпали между 6 ч. 32 мин. и 6 ч. 33 мин.

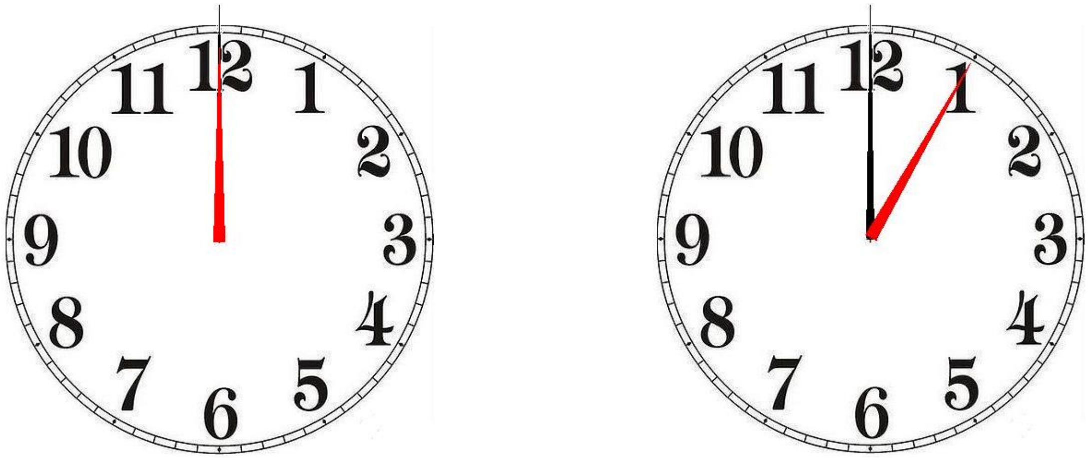
Из приведенного решения видно, что время воспринимается школьниками, как дискретная величина, и дробление времени на все более мелкие единицы не даст **точного** решения задачи. Чтобы перейти к отысканию точного решения, обучающийся должен, в первую очередь, осознать, что оно может быть выражено не обязательно в целом количестве минут или секунд.

Приведем несколько способов решения данной задачи, которые могут быть предложены обучающимся при изучении различных тем школьного курса математики.

Решение 1. Данное решение может быть рассмотрено при изучении темы «Геометрическая прогрессия». Основная идея решения указана выше в цитате из романа «Война и мир».

Будем представлять часы в виде диска, разделенного на 12 секторов. Стрелки на часах в своем движении описывают окружности. За 60 минут – минутная стрелка пробегает все 12 секторов. Часовая стрелка за 60 минут пробегает 1 сектор. То есть часовая стрелка движется в 12 раз медленнее минутной. Это наш Ахиллес и черепаха!

2017, Том 5, №3
ISSN 2309-4265

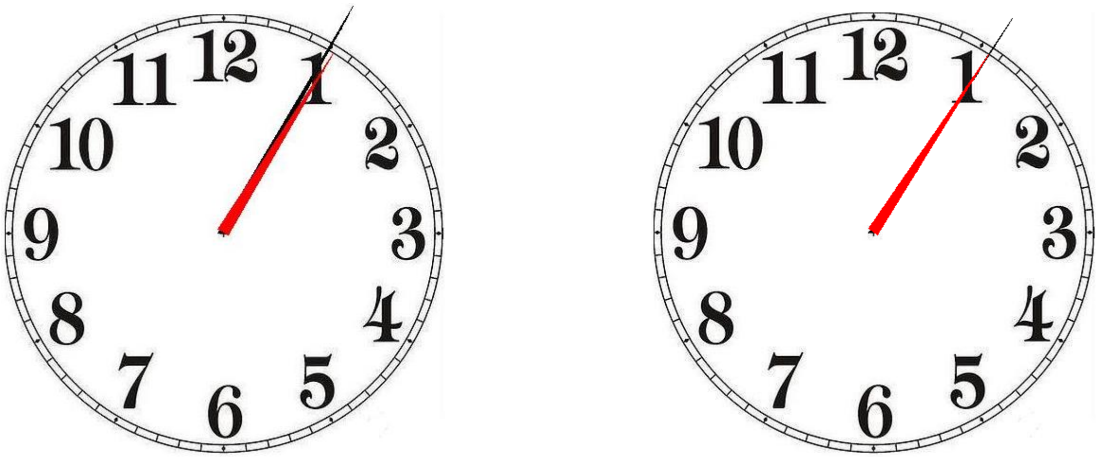


а б

Рисунок 1. *Изменение положения стрелок за первый час наблюдения (составлено автором)*

Начнем наблюдение за движением стрелок в полночь (рис. 1а): в этот момент стрелки совпадают. За первый час минутная стрелка сделает полный оборот, а часовая – его двенадцатую часть (рис. 1б). Для того, чтобы стрелки опять совпали, минутная стрелка должна «догнать» часовую. Опишем процесс «погони»:

1. пока минутная стрелка преодолеет 1 сектор в 30^0, часовая сдвинется на $\frac{1}{12}$ часть следующего сектора в $\frac{30^0}{12}$ (рис. 2а) и минутной придется снова её догонять…



а б

Рисунок 2. *Изменение положения стрелок за второй час наблюдения (составлено автором)*

2. пока минутная стрелка преодолеет $\frac{1}{12}$ часть сектора в $\frac{30^0}{12}$, часовая сдвинется на $\frac{1}{12^2}$ часть этого сектора в $\frac{30^0}{12^2}$ и минутной придется снова её догонять…

3. пока минутная стрелка преодолеет $\frac{1}{12^2}$ часть сектора в $\frac{30^0}{12^2}$, часовая сдвинется на $\frac{1}{12^3}$ часть этого сектора в $\frac{30^0}{12^3}$ и минутной придется снова её догонять…

и так далее… до бесконечности… Так как время течет непрерывно, то для того, чтобы определить «место встречи» стрелок, необходимо вычислить сумму, выражающую части секторов, пробегаемые минутной стрелкой в процессе «погони»:

$$30^0+\frac{30^0}{12}+\frac{30^0}{12^2}+\frac{30^0}{12^3}+\ldots=\frac{30^0}{1-\frac{1}{12}}=\frac{12}{11}\cdot 30^0=30^0+\frac{30^0}{11}.$$

Так как 30^0 соответствует пяти минутам, то это значит, что первый раз после полуночи стрелки встретятся в $5\frac{5}{11}$ минут второго, то есть примерно, в 1 час, 5 минут, 30 секунд (рис. 2б).

Начиная с этого момента, история повторяется… То есть, чтобы встретиться снова, минутная стрелка должна сделать полный оборот и пройти ещё $30^0+\frac{30^0}{11}$ в «погоне» за часовой стрелкой. Чтобы стрелки совпали после шести часов, минутной стрелке необходимо пробежать шесть целых секторов и шесть одиннадцатых долей этих секторов: $6\cdot\left(30^0+\frac{30^0}{11}\right)$, или $6\cdot\left(5+\frac{5}{11}\right)$ минут, то есть $30+\frac{30}{11}=32\frac{8}{11}$ минут.

Ответ: На часах было точно 6 часов и $32\frac{8}{11}$ минут (это примерно, 32 минуты и 44 секунды).

Решение 2. Основная идея следующего решения состоит в том, что моделями непрерывных процессов могут служить непрерывные функции. Движение часовой и минутной стрелки осуществляется равномерно, значит, может быть описано с помощью линейной функции.

Будем измерять расстояния, преодолеваемые стрелками на часах, минутными делениями. Изучим зависимость между временем (t), измеряемым в минутах, и расстоянием, проходимым стрелкой за это время (S). Началом отсчета расстояний и времени считаем 12 часов.

Минутная стрелка за каждую минуту проходит одно минутное деление, значит, для минутной стрелки $S_м=t$. Но, через 60 минут эта стрелка возвращается в исходное положение. То есть, искомая функция для минутной стрелки – это кусочно-линейная функция, периодическая, с наименьшим положительным периодом – 60 минут:

$$S_м=t-60k,\quad k\le t<k+1,\quad k\ge 0.$$

Часовая стрелка за каждую минуту проходит $\frac{1}{12}$ часть минутного деления, значит, для неё $S_ч=\frac{1}{12}t$. Но, через 720 минут эта стрелка возвращается в исходное положение. То есть, искомая функция для часовой стрелки – это кусочно-линейная функция, периодическая, с наименьшим положительным периодом – 720 минут:

$$S_ч=\frac{1}{12}t-720n,\quad n\le t<n+1,\quad n\ge 0.$$

Для наглядности, построим графики функций для двенадцатичасового периода времени. Точки пересечения графиков соответствуют моментам совпадения стрелок (рис. 3).

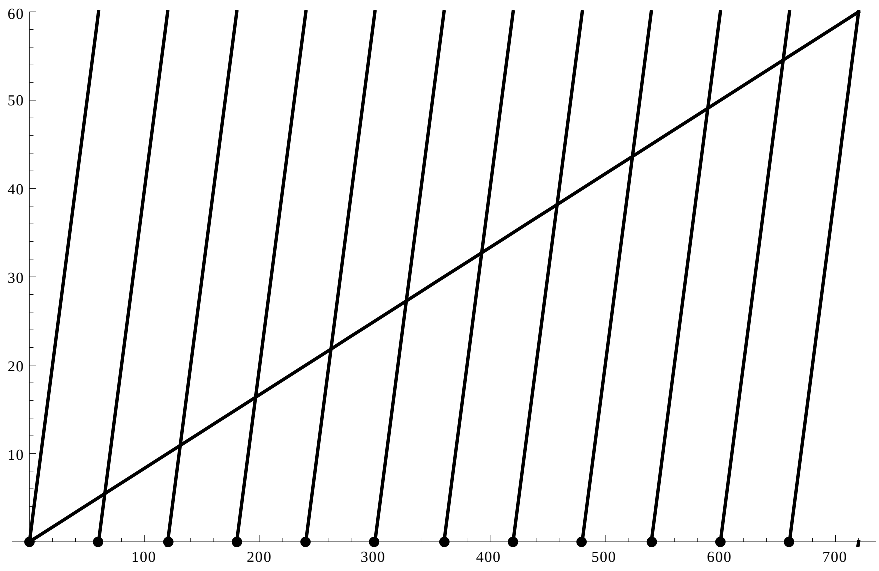


Рисунок 3. *Графики функций* $S_м$ *и* $S_ч$ *при* $0 \le t \le 720$ *(составлено автором)*

В задаче надо найти точку пересечения, расположенную между шестью и семью часами, то есть между 360-ой и 420-ой минутами (рис. 4):

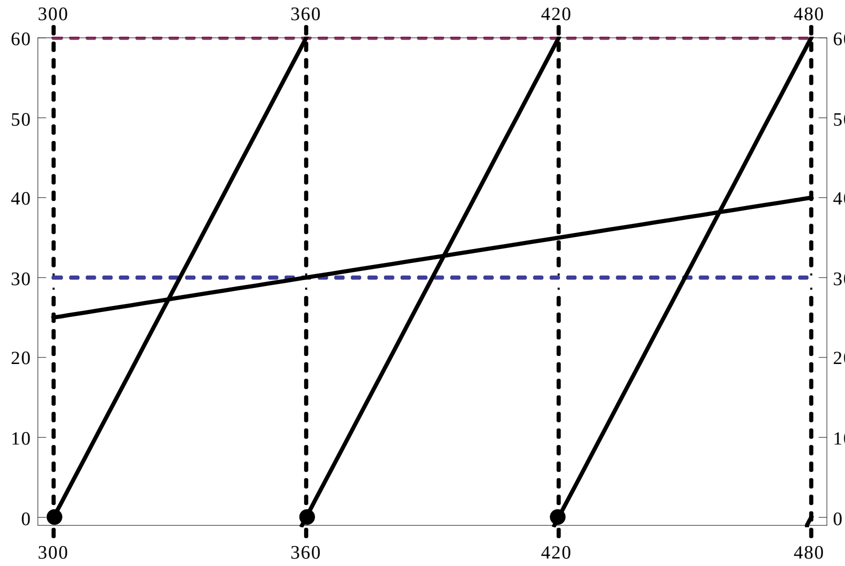


Рисунок 4. *Графики функций* $S_м$ *и* $S_ч$ *при* $300 \le t \le 480$ *(составлено автором)*

$$\begin{cases} S_м = t - 360 \\ S_ч = \dfrac{1}{12}t \end{cases} \qquad \frac{1}{12}t = t - 360 \qquad t = \frac{4320}{11} = 392\frac{8}{11}.$$

$392\frac{8}{11} = 360 + 32 + \frac{8}{11}$ минут – это шесть часов, тридцать две минуты и, почти, 44 секунды.

Решение 3. Данное решение может быть рассмотрено при изучении темы «Уравнения». Переформулируем задачу: Из точки А (12 часов на циферблате) с некоторой скоростью отправилась минутная стрелка, в тот же момент и в том же направлении из точки В (6 часов на циферблате) с меньшей скоростью отправилась часовая стрелка (рис. 5). Через какое время минутная стрелка сравняется с часовой?

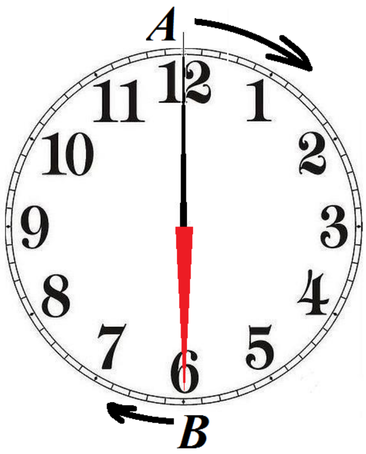


Рисунок 5. *Положение стрелок в 6.00 и направление их движения (составлено автором)*

Обозначим:

t – время, измеряемое в минутах;

S – расстояния на циферблате, измеряемые в минутных делениях;

V – скорость движения стрелки по циферблату;

x – неизвестная величина – время, отсчитываемое с начала движения, через которое часовая стрелка сравняется с минутной.

Так как минутная стрелка за одну минуту проходит одно минутное деление, то её скорость $V_м = 1 \frac{мин.дел.}{мин.}$. При этом, часовая стрелка движется в двенадцать раз медленнее, значит её скорость $V_м = \frac{1}{12} \frac{мин.дел.}{мин.}$.

Оформим данные задачи в виде таблицы:

	t	V	S
Минутная стрелка	x	1	x
Часовая стрелка	x	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}x + 30$

Следовательно, для решения задач, необходимо решить уравнение $x = \frac{1}{12}x + 30$, $x = \frac{360}{11} = 32\frac{8}{11}$ – минутная стрелка сравняется с часовой через тридцать две минуты и, почти, 44 секунды после шести.

Важно, что приведенные выше решения можно предлагать обучающимся при изучении различных разделов математики, в том числе, высшей математики (например, в решении 1 можно использовать предельный переход и теорию числовых рядов). Поразительная красота этой задачи заключается в краткости и простоте формулировки, за которой кроится невероятная глубина как математического, так и философского содержания.

В заключение отметим, что использование когнитивных динамичных компьютерных визуализаций позволяет значительно расширить развивающие возможности задачи о часах [11].

Рассмотренная задача практическая, ведь с измерением времени сталкивается каждый из нас. Предложенные способы ее решения показывают прикладное применение математических методов и могут стать одним из средств формирования научного мировоззрения школьников и студентов при изучении математики [2; 7; 9]. И важно, чтобы преподаватели всех дисциплин действовали при воспитании научного мировоззрения согласованно, подобно инструментам хорошо сыгранного симфонического оркестра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афонин И.Д. Психология и педагогика высшей школы [Электронный ресурс]: учебник / И.Д. Афонин, А.И. Афонин – Электрон. текстовые данные. – М.: Русайнс, 2016. – 244 c. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/61648.html. – ЭБС «IPRbooks» (Дата обращения: 14.07.2017).
2. Берсенева О.В. Компетентностно ориентированные задачи как средство совершенствования исследовательских компетенций будущих учителей математики // Интернет-журнал «Мир науки» 2015 №3 http://mirnauki.com/PDF/52PDMN315.pdf (доступ свободный). (Дата обращения: 14.07.2017).
3. Гнеденко Б.В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике [Текст] / Б.В. Гнеденко. – М.: Просвещение, 1982. – 144 с.
4. Жохов А.Л. Познание математики и основы научного мировоззрения: мировоззренчески направленное обучение математике [Текст]: учебное пособие / А.Л. Жохов. – Изд-во ЯГПУ, 2008. – 183 с.
5. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов матем. спец. педвузов / Под ред. Т.А. Ивановой. 2-е изд., испр. и доп. – Н. Новгород: НГПУ, 2009. – 355с
6. Карелина И.Е. Формирование мировоззрения учащихся при изучении геометрии в старших классах естественнонаучного профиля обучения. – Автореф. Дис. ... канд. пед. наук. – М., 2005. – 17 с.
7. Кириллова Д.А. Кейс-задачи как основа фонда оценочных средств по математическому анализу для направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика / Д.А. Кириллова // Современные исследования социальных проблем. – 2015. – №10. – С. 430-446.
8. Мирошин В.В. Решение задач с параметрами. Теория и практика [Текст] / В.В. Мирошин. – М.: Издательство «Экзамен», 2009. – 286 с.
9. Одоевцева И.Г., Кириллова Д.А. Олимпиада по математике как средство оценки метапредметных результатов образования // Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области: сб. науч. тр. научно-практ. конф. (18 февраля 2017 г., г. Тверь). / в 2 ч. Ч.2 – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2017. – 52-54 С.
10. Татаринов Д.А. Формирование основ научного мировоззрения учащихся 5-6 классов на интегрированных занятиях математического кружка. – Автореф. дис. … канд. пед. наук. – Ярославль, 2013. – 24 с
11. Фишман Б.Е., Эйрих Н.В. Когнитивная динамичная компьютерная визуализация как условие, необходимое для субъектного освоения учащимися математических понятий // Современные наукоемкие технологии. – 2016. – № 9 – 2. – С. 355-359.

Kirillova Dina Alexandrovna
Sholom-Aleichem Priamursky state university, Russia, Birobidzhan
E-mail: dina_kir_03@mail.ru

Odoevtseva Irina Gennadyevna
Sholom-Aleichem Priamursky state university, Russia, Birobidzhan
E-mail: dichenko-irina@list.ru

"The task about the clock" as a way of forming the scientific worldview while teaching of mathematics

Abstract. This article discusses the problem of forming a scientific worldview with the help of mathematical disciplines in students. The main idea of the article is that, the study of mathematics as a method of knowledge of the world, contributes to the formation of the general culture of the personality; the formation of an understanding of the interrelation between mathematics and reality promotes world understanding. We consider time, the continuity of the flow of time, the continuity of processes in time as common categories of scientific worldview.

The main part of the article is the analysis of one task, designed to help learners understand the continuity of the flow of time. The considered task and ways of its solution can become one of the means of forming the scientific outlook of pupils and students in the study of mathematics.

Keywords: the scientific worldview; the continuity; the task; teaching of mathematics