Мир Науки
научный интернет-журнал
2017, Том 5, №2
ISSN 2309-4265
(499) 755 50 99
http://mir-nauki.com

Интернет-журнал «Мир науки» ISSN 2309-4265 http://mir-nauki.com/

2017, Том 5, №2 (март - апрель) http://mir-nauki.com/vol5-2.html

URL статьи: http://mir-nauki.com/PDF/33PDMN217.pdf

Статья опубликована 18.05.2017

Ссылка для цитирования этой статьи:

Матвеев С.Н., Антропова Г.Р. Организация спецкурса по геометрии средствами информационных технологий (в подготовке бакалавров) // Интернет-журнал «Мир науки» 2017, Том 5, №2 http://mir-nauki.com/PDF/33PDMN217.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 514.161

Матвеев Семен Николаевич
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Набережночелнинский институт (филиал), Россия, Набережные Челны
Кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: semen967@rambler.ru
РИНЦ: http://elibrary.ru/author_items.asp?id=379741

Антропова Гюзель Равильевна
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Набережночелнинский институт (филиал), Россия, Набережные Челны
Кандидат педагогических наук, доцент
E-mail: antropovagr@mail.ru
РИНЦ: http://elibrary.ru/author_items.asp?id=796749

Организация спецкурса по геометрии средствами информационных технологий (в подготовке бакалавров)

Аннотация. В данной статье нами рассмотрена возможность использования свободно распространяемого пакета системы аналитических вычислений Maxima в построении спецкурса по некоторым разделам алгебры и конечной проективной геометрии для подготовки бакалавров по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), на примере моделирования конечной проективной структуры поля Галуа $GF(p^n)$. В этой статье мы приводим решение задачи для случая n=3 и p=3, нами получена конфигурация схожая с моделью Кэли-Клейна с конечным числом точек и прямых. Предлагаемая технология проектирования комплекса задач оказалась полезной и для формирования предметных умений, необходимых в решении различных типов задач как алгебраических, так и геометрических, и имеет универсальный метапредметный характер и призвана формировать метаумения: общеучебные, междисциплинарные и надпредметные умения и навыки по соответствующим разделам нескольких учебных дисциплин. Таким образом, мы рассмотрели некоторые способы формирования междисциплинарных системных знаний с применением системы компьютерной алгебры (СКА) Maxima, что на наш взгляд приведет к повышению мотивации занятий научно-исследовательской работе студентов, магистров и молодых ученых.

Ключевые слова: педагогическое образование; компетенции; спецкурс; конечная проективная геометрия; поля Галуа; система компьютерной алгебры Maxima; исследование математических моделей; формирования междисциплинарных системных знаний

Современные требования ФГОС предусматривают, что выпускники педагогических вузов должны обладать рядом определенных компетенций. В их числе немаловажное место занимают компетенции, связанные с информационными технологиями. Например, согласно образовательному стандарту, основные образовательные программы подготовки бакалавров по направлению 44.03.05 «Педагогическое образование» (профили «Математика» и «Информатика») предполагают, что выпускник способен использовать математический аппарат, методологию программирования и современные компьютерные технологии для решения практических задач получения, хранения, обработки и передачи информации; реализовывать аналитические и технологические решения в области программного обеспечения и компьютерной обработки информации, а также способностью программировать и создавать программные прототипы решения прикладных задач[1]. С другой стороны, анализ состояния качества знаний, показывает, что большинство выпускников имеют в целом фрагментарные знания по математике: отсутствует единое понимание математической структуры, нет системности. Эта проблема - следствие перестройки математического образования в подготовке бакалавров. Для педагогического вуза такое положение не типично: как правило, выпускник всегда должен уметь систематизировать научный материал, хотя бы в общих чертах. Поэтому необходима системная стратегия преподавания математических и смежных с ними дисциплин. Возможно, для решения этой проблемы привлечение комплекса учебных профессионально ориентированных задач, целостно охватывающих основные области различных разделов и смежных дисциплин, в частности информатики. Важно то, что такой подход позволит в рамках изучения математики модифицировать лишь объекты математической деятельности, оставляя без изменения основополагающие законы математики. В частности, трудно представить преподавание геометрии, без применения информационных технологий, так как при этом отсутствует необходимость реализовывать сложные процедуры на языках высокого уровня. Современные математические пакеты доступны широкому кругу пользователей, в том числе и преподавателям, к тому же они сравнительно удобны в применении и позволяют решать задачи максимально приближенно к традиционному способу, однако остается вопрос выбора программных пакетов. Наиболее перспективным является выбор свободно распространяемого программного обеспечения (ПО), т.к. его использование для учебного процесса привлекательнее по сравнению с коммерческим. Прежде всего, потому что модель, которая используется в свободно распространяемом ПО, это модель открытости и общедоступности всех наработок. В случае использования коммерческого ПО, которое находится в собственности производителя, общедоступность различных приложений значительно ограничена, в связи с этим востребованность общедоступных программ в системе образования неоспорима. Следует отметить, что в настоящее время наблюдается активное привлечение в российское образование свободно распространяемого ПО, что является целесообразным, поскольку его использование в учебно-воспитательном процессе и научно-исследовательской деятельности - это реальная возможность для студентов и преподавателей использовать в своем распоряжении копии такого ПО без финансовых затрат.

Система аналитических вычислений Maxima, выбранная нами для построения спецкурса по геометрии, имеет достаточные функциональные возможности, и является свободно распространяемой (под лицензией GNU Public License). Мы считаем ее приемлемой, с точки зрения применения в обучении математике, как в школе, так и вузе. Очевидно, что построение преподавания курса геометрии, где в качестве инструментария наряду с геометрическим

[1] Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации N 91 от 9 февраля 2016 г. «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (уровень бакалавриата)» (зарегистрировано в Минюсте России 02 марта 2016 г. № 41305) [Электронный ресурс] / Портал Федеральных государственных образовательных стандартов. - Режим доступа: http://fgosvo.ru/news/7/1805.

аппаратом широко используются достаточно распространенные ПО, влечет за собой более интенсивное формирование знаний и компетенций, относящихся не только к геометрии, но и к другим дисциплинам, в частности алгебре и информатике. Такой цельный подход раскрывает концептуальные возможности изучаемых дисциплин, а также возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых предметов.

В качестве такого примера приведем применение системы компьютерной алгебры (СКА) Maxima в изучении задач моделирования конечной проективной структуры поля Галуа $GF(p^n)$ и решении некоторых геометрических задач на построенных моделях конечных проективных плоскостей. Следует заметить, что в основном во многих работах исследуются (классификация, подсчеты подплоскостей, существование плоскостей определенного порядка и т.д.) структуры конечных плоскостей с использованием лишь аппарата алгебр без изучения их геометрических свойств.

Известно, что поле Галуа -это алгебра, состоящая из конечного числа элементов p^n с двумя бинарными операциями (сложение и умножение), образующее коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, где p - простое число, называемое характеристикой поля, n - натуральное число, причем ненулевые элементы образуют мультипликативную группу, то есть в ней есть порождающий элемент A, все остальные получаются возведением его в степень, причем $A^{p^n-1}=1$, количество примитивных элементов определяется функцией Эйлера. Поле $GF(p^n)$ естественным образом определяет структуру векторного пространства с базисом $\{1, A, \dots A^{n-1}\}$ [2]. Мы приводим решение задачи для случая $n=3$ и p=3 (случай p=2 и некоторые сведения конечных проективных плоскостей рассмотрены нами ранее [1, 7, 8]).

Важно отметить, что здесь проявляется одно из главных достоинств математических пакетов - возможность исследования более сложных математических моделей, благодаря сокращению громоздких вычислений и рутинных операций. Также включение информационных технологий и знаний в содержание задач, решаемых геометрическими методами, позволяет обогатить курс информатики профессионально ориентированными задачами.

Рассмотрим $GF(p^3), p=3$. Для построения трехмерного векторного пространства введем линейный оператор с матрицей $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}0&0&\gamma\\1&0&\beta\\0&1&\alpha\end{pmatrix}$, где $A^3=\alpha A^2+\beta A+\gamma 1$, и решим уравнение $\mathrm{A}^{26}=1$ равносильное системе (1):

$$\begin{cases}\gamma^8+\alpha^9\gamma^5+2\alpha^{12}\gamma^4+(2\alpha^9\beta^3+\alpha^{13}\beta)\gamma^3+(\beta^9+\alpha^{18})\gamma^2+\\ +(\alpha^3\beta^9+\alpha^9\beta^6+\alpha^{21})\gamma+\beta^{12}+2\alpha^4\beta^{10}+\alpha^6\beta^9+\alpha^{18}\beta^3+2\alpha^{22}\beta+\alpha^{24}=0,\\ 2\alpha\gamma^8+2\alpha^{10}\gamma^5+2\alpha\gamma^8+2\alpha^{13}\gamma^4+(2\alpha^{12}\beta^2+2\alpha^{14}\beta+\alpha^{16})\gamma^3+(2\alpha\beta^9+\alpha^{13}\beta^3+\\ +2\alpha^{19})\gamma^2+(\alpha^4\beta^9+\alpha^{10}\beta^6+\alpha^{22})\gamma+\alpha^3\beta^{11}+\alpha^5\beta^{10}+\alpha^9\beta^8+\alpha^{11}\beta^7+\alpha^{21}\beta^2+\alpha^{23}\beta=0,\\ 2\beta\gamma^8+2\alpha^9\beta\gamma^5+(2\alpha^{12}\beta+2\alpha^{14})\gamma^4+(2\beta^{10}+\alpha^{12}\beta^4+2\alpha^{18}\beta+\alpha^{20})\gamma^2+\\ +(\alpha^3\beta^{10}+\alpha^5\beta^9+\alpha^{11}\beta^6+\alpha^{21}\beta+\alpha^{23})\gamma=1.\end{cases}$$

Реализация некоторых вычислений с помощью СКА Maxima имеет вид:

B: matrix([0,0,gamma], [1,0,beta], [0,1,alpha]);

$$\begin{bmatrix}0&0&\Gamma\\1&0&\beta\\0&1&\alpha\end{bmatrix}$$

B4:ratsimp(B.B.B.B.);

$$\begin{bmatrix} \alpha\Gamma & (\beta+\alpha^2)\Gamma & \Gamma^2+(2\alpha\beta+\alpha^3)\Gamma \\ \Gamma+\alpha\beta & \alpha\Gamma+\beta^2+\alpha^2\beta & (2\beta+\alpha^2)\Gamma+2\alpha\beta^2+\alpha^3\beta \\ \beta+\alpha^2 & \Gamma+2\alpha\beta+\alpha^3 & 2\alpha\Gamma+\beta^2+3\alpha^2\beta+\alpha^4 \end{bmatrix}$$

B24:ratsimp(B4.B4.B4.B4.B4.B4);

C: matrix([0,0,0],[0,0,0],[0,0,1]);

U: ratsimp (B24.C);

M:{}$ for alpha: 0 thru 2 do for beta: 0 thru 2 do for gamma: 0 thru 2 do if integer (alpha) and integer (beta) and integer (gamma) and mod(...)=0 and mod(…)=0andmod(…)=1

then M:{M,[alpha, beta, gamma]}$

flatten(M); cardinality(%);

{[0,1,1], [0,1,2], [1,0,2], [1,1,1], [1,2,2], [2,0,1], [2,1,2], [2,2,1]}; 8

Таким образом, возможных операторов восемь, из которых четыре приводят к структуре конечной проективной плоскости третьего порядка:

$$\mathcal{A}_{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_{\mathrm{III}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_{\mathrm{IV}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Построенное с использованием оператора $\mathcal{A}_{\mathrm{III}}$ двумерное векторное пространство порождает конечную проективную плоскость $P_2(GF(3^3))$ третьего порядка из тринадцати точек, которые определяются следующими однородными проективными координатами:

list3: [2,0,1,"третийоператор"];

A^1=[0,1,0];A^2=[1,0,0];A^3=[alpha:2,beta:0,gamma:1]; for i: 3 thru 25 do if i=3 thenprint(A^(i+1)=[u[i+1]:mod(alpha*alpha+beta,3),

v[i+1]:mod(beta*alpha+gamma,3),w[i+1]:mod(gamma*alpha,3)])

else if i>3 then print(A^(i+1)=[u[i+1]:mod(alpha*u[i]+v[i],3),v[i+1]:mod(beta*u[i]+w[i],3),w[i+1]:mod(gamma*u[i],3)]);

A=[0,1,0], A^2=[1,0,0], A^3=[2,0,1], A^4=[1,1,2], A^5=[0,2,1], A^6=[2,1,0], A^7=[2,0,2], A^8=[1,2,2], A^9=[1,2,1], A^{10}=[1,1,1], A^{11}=[0,1,1], A^{12}=[1,1,0], A^3=[0,0,1].

На основе полученных результатов можно продолжить конструирование геометрических объектов конечной проективной плоскости. В частности, отличные от A мультипликативные образующие могут быть выбраны шестью $(\varphi(26) = 12)$ способами. Значит, возможны следующие мультипликативные образующие: $\{A, A^3, A^5, A^7, A^9, A^{11}, A^{15}, A^{17}, A^{19}, A^{21}, A^{23}, A^{25}\}$, их показатели взаимно просты с числом 26. Следовательно, замена мультипликативной образующей приводит к соответствующим преобразованиям $\{f_i\}$ построенной модели. Получено, что $\{f_3, f_9\}$ - проективные преобразования (с одной инвариантной точкой), в отличие от преобразований $\{f_5, f_7, f_{11}, f_{15}, f_{17}, f_{19}, f_{21}, f_{23}, f_{25}\}$, причем образы последних изоморфизмов также разбиваются на подгруппы трех проективно эквивалентных структур.

Таким образом, выбор оператора $\mathcal{A}_{\mathrm{I}}$ приводит четырем алгебраически изоморфным, но проективно не эквивалентным структурам.

На $P_2(GF(3^3))$ определен согласованный репер $R = (A^2, A^1, A^{13}, A^{10})$. Прямые определяем, используя принцип двойственности:

$$A^1 = (0;1;\ 0) \to a_1 : x^2 = 0\ \ => a_1 = \{A^2; A^3; A^7; A^{13}\}.$$

Уравнение можно получить и так:

$$(A^1A^3): \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 => x^1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - x^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + x^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 <=> x^2{=}0$$

Тогда прямые плоскости определяются соответствующими уравнениями (таб. 1).

Таблица 1

Инцидентность точек и прямых (таблица разработана авторами)

	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	A^7	A^8	A^9	A^{10}	A^{11}	A^{12}	A^{13}	
		*	*				*						*	$x^2 = 0$
a_2	*				*						*		*	$x^1 = 0$
a_3	*						*		*	*				$2x^1 + x^3 = 0$
a_4				*		*	*				*			$x^1 + x^2 + 2x^3 = 0$
a_5		*						*		*	*			$2x^2 + x^3 = 0$
a_6				*						*		*	*	$2x^1 + x^2 = 0$
a_7	*		*	*				*						$2x^1 + 2x^3 = 0$
a_8					*		*	*				*		$x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 0$
a_9			*						*		*	*		$x^1 + 2x^2 + x^3 = 0$
a_{10}			*		*	*				*				$x^1 + x^2 + x^3 = 0$
a_{11}		*		*	*				*					$x^2 + x^3 = 0$
a_{12}						*		*	*				*	$x^1 + x^2 = 0$
a_{13}	*	*				*						*		$x^3 = 0$

Таким образом, проверено, что полученное множество точек и прямых определяет конечную плоскость третьего порядка. Плоскость Дезаргова, что видно из таблицы.

Напомним, что сложное отношение четырех точек на проективной плоскости определяется формулой $(AB, CD) = \frac{(AC)(BD)}{(AD)(BC)}$, например, на прямой $a_1 = \{A^2, A^3, A^7, A^{13}\}$, где $A^2 = (1;0;0)$; $A^3 = (2;0;1)$; $A^7 = (2;0;2)$; $A^{13} = (0;0;1)$, тогда $(A^2, A^3, A^7, A^{13}) = = \frac{(A^2A^7)(A^3A^{13})}{(A^2A^{13})(A^3A^7)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 2} = \frac{4}{2} = 4 \cdot 2 = 8 = 2$, но $\bar{2} = -1$. Значит, эта прямая определяется гармонической четверкой точек.

Если определить на этой плоскости овальную линию второго порядка уравнением $\gamma: (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$, то могут быть определены внутренние и внешние точки относительно заданной овальной линии γ, а именно, A - внешняя, если её поляра a пересекает γ. Используя основные инварианты проективной плоскости, может быть получена следующая конфигурация схожая с моделью Кэли-Клейна с конечным числом точек и прямых (рис. 1).

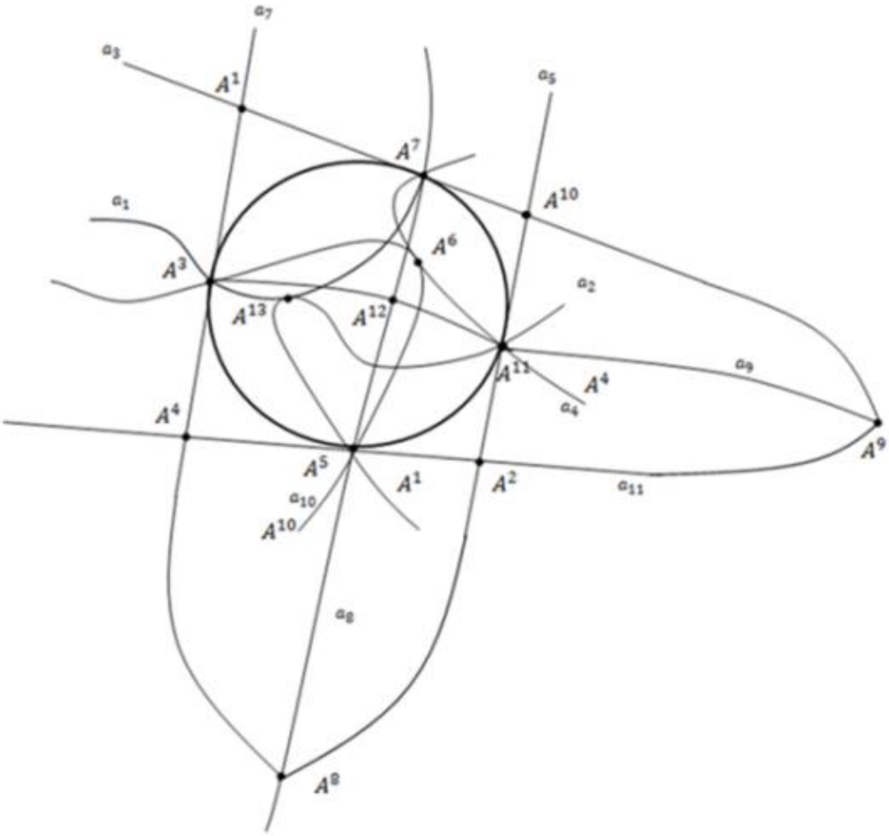

Рисунок 1. *Расположение точек и прямых относительно овальной линии второго порядка (рисунок разработан авторами)*

С точки зрения формирования требуемых компетенций нами проведено экспериментальное проектирование комплекса заданий в рамках спецкурса по некоторым разделам алгебры и конечной проективной геометрии (для студентов 2-го курса ФГБОУ ВО «НГПУ» подготовки бакалавров по направлению 44.03.05 «Педагогическое образование»). Каждый раздел имеет центральное математическое понятие, которое присутствует в различных типах задач как алгебраических, так и геометрических, и имеет универсальный метапредметный характер и призван формировать метаумения: общеучебные, междисциплинарные и надпредметные умения и навыки. С другой стороны, предлагаемая технология проектирования комплекса задач оказалась полезной и для формирования предметных умений, необходимых в решении задач по соответствующим разделам дисциплин. При работе с комплексом задач проведена поэтапная работа. На первом этапе студенты изучают необходимый материал на доступном материале по изучаемому разделу.

Следующий этап работы предполагает способность студента организовать свою работу по теме исследования через решение различных задач с привлечением математического аппарата и информационных технологий. Таким образом, мы рассмотрели некоторые способы формирования междисциплинарных системных знаний с применением СКА Maxima, что на наш взгляд способствует повышению мотивации к научно-исследовательской работе студентов, магистров и молодых ученых. Использование новых информационных технологий в изучении математики является предпосылкой эффективного усвоения дисциплины, а обучение становится более профессионально ориентированным. Это приводит к усилению мотивации обучения и выявляет особенности средств новых информационных технологий в обучении. Необходимость использования возможностей новых информационных технологий в изучении математики связано также с тем, что требования, предъявляемые обществом к уровню математической подготовки студентов, неуклонно растут. Это объясняется широкими возможностями практического применения математики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антропова, Г.Р. О моделях проективной плоскости поля Галуа / Г.Р. Антропова, С.Н. Матвеев // Социально-экономические и технические системы: исследование, проектирование, оптимизация. 2016. - № 1 (68). - С. 17-23.
2. Арнольд, В.И. Динамика, статистика и проективная геометрия полей Галуа / В.И. Арнольд. - М.: МЦНМО, 2005. - 72 с.
3. Афанасьев В.В. “Конечные геометрии”, Геометрия, СМФН, 22, РУДН, М., 2007, 127-138; Journal of Mathematical Sciences, 153:6 (2008), 856-868.
4. Васильков В.И. Исследование подплоскостей в конечных проективных плоскостях малых порядков: справочное пособие / В.И. Васильков. - Челябинск: Изд-во Челяб. гос. пед. ун-та, 2008. - 94 с.
5. Костин А.В., Костина Н.Н., Миннегулова Е.О. Использование имитационных технологий при подготовке будущих учителей // Интернет-журнал «Мир науки» 2016, Том 4, номер 1.
6. Кочетков Ю.Ю. О геометрии кубических полей Галуа // Математические заметки. 2011. Т. 89. № 1. С. 139-144.
7. Матвеев, С.Н. Модели конечной проективной прямой, индуцируемые полем Галуа / С.Н. Матвеев, Ф.С. Сиразов // Актуальные проблемы математического образования: сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф. - Набережные Челны: ФГБОУ ВПО «НИСПТР», 2015. - С. 37-40.
8. Матвеев. С.Н. Использование системы компьютерной алгебры Maxima в изучении конечных проективных прямых / С.Н. Матвеев, Ф.С. Сиразов // Высшее образование сегодня. - 2015. - № 2. - С. 72-75.
9. Пономарев К.Н. О группе Галуа поля, порождаемого счётным числом элементов. // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. 2014. № 2-3 (23-24). С. 31-33.
10. Тарнавский Т. Maxima - максимум свободы символьных вычислений. [Электронный ресурс] / Т. Тарнавский - «Linux Format» №7 (81), июль 2006.

Matveev Semen Nikolaevich
Kazan (Volga region) federal university
Naberezhnye Chelny branch, Russia, Naberezhnye Chelny
E-mail: semen967@rambler.ru

Antropova Gyuzel Raviljevna
Kazan (Volga region) federal university
Naberezhnye Chelny branch, Russia, Naberezhnye Chelny
E-mail: antropovagr@mail.ru

A special course on Geometry by means of IT (bachelors)

Abstract. The article examined the possibility of using the redistributable package of Maxima analytical calculation in the construction of a special course on some sections of Algebra and finite projective Geometries to prepare the bachelors in the field of 44.03.05 Pedagogical education (with two provisioning profiles) by the example of modeling a finite projective structure with the Galois field GF (p^n). The article presents the solution to the problem with the case n=3 and p=3, the received configuration is similar to Cayley-Klein model with a finite number of points and straight lines. The proposed design technology for tasks complex has proved to be useful for the formation of subject-specific skills required in solving different types of problems such as algebraic and geometric ones, and to be of a universal multidisciplinary character. It is intended to generate metaskills - educational, multidisciplinary and interdisciplinary skills and abilities for the relevant sections of several academic disciplines. Thus, we considered some methods of forming an interdisciplinary system of knowledge with the help of Maxima Computer Algebra System (CAS), that, in our opinion, will lead to increasing motivation on the part of students, masters and young scientists in their research work.

Keywords: pedagogical education; competences; a discipline course; Finite Projective Geometry; Galois fields; Maxima Computer Algebra System; a study of mathematical models for the interdisciplinary system of knowledge formation