Интернет-журнал «Мир науки» ISSN 2309-4265 http://mir-nauki.com/

2016, Том 4, номер 6 (ноябрь - декабрь) http://mir-nauki.com/vol4-6.html

URL статьи: http://mir-nauki.com/PDF/32PDMN616.pdf

Статья опубликована 12.01.2017

Ссылка для цитирования этой статьи:
Лобанова Н.И. Элементы теории дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования // Интернет-журнал «Мир науки» 2016, Том 4, номер 6 http://mir-nauki.com/PDF/32PDMN616.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 517.28

Лобанова Наталья Ивановна
МУДО «Центр внешкольной работы г. Зеленокумска», Россия, Зеленокумск
Педагог дополнительного образования
ФГБОУ ВО «Астраханский государственный университет», Россия, Астрахань
Аспирант кафедры «Высшей математики и методики её преподавания»
Специальность 13.00.02 «Теория и методика обучения и воспитания»
E-mail: lobantchik@yandex.ru

Элементы теории дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования

Аннотация. В статье на примере изучения элементов теории дифференциальных уравнений описан один из вариантов обеспечения реализации принципа непрерывности и преемственности в обучении математике между общеобразовательной школой и дополнительным образованием. С целью обучения школьников в системе дополнительного образования решению задач с помощью дифференциальных уравнений, показана необходимость использования практико-ориентированного подхода, который позволяет значительно повысить эффективность обучения. Этому способствует система отбора содержания учебного материала, помогающая учащимся оценивать значимость, практическую востребованность приобретаемых знаний и умений. Описан основной метод решения практико-ориентированных задач - метод математического моделирования, состоящий из трех основных этапов: перевод предложенной задачи с языка сюжетной задачи на язык математических терминов; решение задачи средствами математики; интерпретации полученного решения. Приведены решения практико-ориентированных задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения; преемственность в обучении математике; принцип непрерывности; дополнительное образование

Взаимосвязь обучения математике в общеобразовательной школе и в рамках дополнительного образования выступает как средство осуществления принципа непрерывности и преемственности. С элементами теории дифференциальных уравнений неявно сталкиваются учащиеся старших классов, например, в курсе физики с результатами интегрирования дифференциального уравнения школьники встречаются уже в 9-м классе при рассмотрении равноускоренного движения. Анализируя задачи, связанные с решением уравнений в школьном курсе математики, академик Д.В. Аносов [5, с. 7] отметил, что «Вероятно, наиболее важные и наиболее распространенные задачи такого рода - это дифференциальные уравнения. В школьном курсе математики о них речи нет, но простейшие примеры дифференциальных уравнений нелегально фигурируют в школьном курсе физики».

Элементы теории дифференциальных уравнений вполне доступны для понимания учащимся 11-х классов. «Самое сложное, что здесь требуется - это понимание смысла понятия производной и начальное умение дифференцировать» [5, с. 7]. В самом деле, анализ школьных учебников, ФГОС и пособий для учителей показывает, что в курс школьной программы не входит изучение даже простейших дифференциальных уравнений, но курс алгебры и начал анализа знакомит учащихся с понятиями производной и интеграла. Поэтому, изучение дифференциальных уравнений является естественным продолжением изучения дисциплины «Алгебра и начала математического анализа», основываясь на геометрическом и физическом смыслах этих понятий.

Дифференциальные уравнения имеют, большое прикладное значение, они широко используются в механике, физике, астрономии, во многих задачах биологии и химии. Например, с помощью дифференциальных уравнений можно вычислить движение планет солнечной системы вокруг Солнца, предсказать моменты лунного и солнечного затмений. Имея на это все основания, выдающиеся ученые отмечали, что «Великая книга природы написана на языке математики» (Галилео Галилей), «Математика - это то, посредством чего люди управляют природой и собой» (А.Н. Колмогоров). Это можно объяснить тем, что нередко объективные законы, которым подчиняются определенные процессы (явления), можно записать в форме дифференциальных уравнений, и тем самым эти уравнения являются средством для количественного выражения этих законов. Благодаря изящным методам решения, конкретным и ясным приложениям дифференциальных уравнений есть все основания рассчитывать, что их изучение вызовет живой интерес у учащихся старших классов.

Таким образом, учитывая важную роль, которую играют дифференциальные уравнения в математике и естествознании (физике, астрономии, химии, биологии, медицине, экономике и других), доступность ясного понимания этой роли, представляется весьма актуальной задача ознакомления учащихся старших классов с элементами теории и приложений этих уравнений. Возникает необходимость и целесообразность обучения школьников решению дифференциальных уравнений и возникших из практики задач, решаемых с помощью дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования, поскольку в рамках обязательного среднего образования эта тема отсутствует [1].

С целью обучения школьников в системе дополнительного образования решению задач с помощью дифференциальных уравнений, необходимо использовать практико-ориентированный подход, который позволяет значительно повысить эффективность обучения. Этому способствует система отбора содержания учебного материала, помогающая учащимся оценивать значимость, практическую востребованность приобретаемых знаний и умений.

На передний план выходит не только умение составлять дифференциальное уравнение, описывающее реальный процесс, но и знание способов решения простейших классов дифференциальных уравнений таких как: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные дифференциальные уравнения, уравнения Бернулли и т.д. Следовательно, решение любой задачи, сводящейся к дифференциальному уравнению, состоит из двух этапов: творческого (составление дифференциального уравнения) и технического (решение дифференциального уравнения).

Важно отметить, что одно и то же дифференциальное уравнение может быть математической моделью совершенно различных природных процессов. Например, решение задачи об определении зависимости атмосферного давления p от высоты h приводит к дифференциальному уравнению $\frac{dp}{dh} = -g \cdot p$, где искомая функция $p = p(h)$ есть плотность воздуха на высоте h, g - ускорение свободного падения, а задача о радиоактивном распаде, согласно которому скорость уменьшения массы радиоактивного вещества пропорциональна количеству этого вещества, приводит к дифференциальному уравнению $\frac{dy}{dt} = -k \cdot y$, где масса радиоактивного вещества y есть функция времени t (k - коэффициент пропорциональности).

Дополнительное образование школьников - это процесс, имеющий свои педагогические технологии, формы и средства их реализации. Дополнительное образование предоставляет школьникам возможности оптимального решения проблем индивидуализации и дифференциации обучения как средства эффективного развития личности, формирования творческой активности и самодеятельности, развития интеллекта [3].

Практико-ориентированным задачам уделяется незначительное время на уроках математики в общеобразовательных школах, в связи с этим большое внимание следует уделять этому типу задач в системе дополнительного образования. А именно практико-ориентированные задачи показывают учащимся значимость прикладного характера математики [2]. Подбирая практико-ориентированных задачи, необходимо учитывать возрастные особенности старшеклассников, как утверждают психологи, подросток начинает рассматривать мир с точки зрения того, как его можно изменить [11].

Практико-ориентированные задачи также показывают школьникам связь между процессами и явлениями реального мира и его математическими моделями [1]. Метод математического моделирования - один из часто применяемых методов исследования реальных ситуаций, который применяется при решении практико-ориентированных задач.

Обучая старшеклассников решению практико-ориентированных задач, есть возможность развить лишь некоторые умения, имеющие существенное значение на всех этапах математического моделирования, ибо весь объем умений нелегко сформировать у учащихся. Тем не менее надлежит заложить основные умения в дополнительном образовании.

Решая практико-ориентированные задачи, у учащихся формируются определенные формы мышления, необходимые для понимания явлений и процессов, происходящих в окружающем нас мире, с помощью построения их математических моделей. Практико-ориентированные задачи дают возможность опробовать умения применить приобретенные знания на практике. Математическое моделирование обширно применяется для изучения мира, окружающего нас, образуя у старшеклассников понятие о его сути. Подведение учащихся к освоению трех этапов (составление математической модели; решение задачи математическими средствами; перевод результата на язык, на котором была записана рассмотренная задача) должно быть системным для педагога дополнительного образования, как и для школьного учителя.

Математическая задача способствует формированию определенных форм мышления, необходимых для освоения окружающей нас действительности, так как изучает понятия, введенные путем абстрагирования от явлений реального мира [9]. Как отмечено выше: решая практико-ориентированные задачи, имеем возможность проверить умения применять полученные знания в практической деятельности и повседневной жизни.

Представляем следующие методические пути решения сформулированной проблемы обучения учащихся решению дифференциальных уравнений:

- решение задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям;
- применение практико-ориентированных задач;
- устранение типичных ошибок старшеклассников при решении задач, с помощью дифференциальных уравнений.

Мир Науки
научный интернет-журнал
2016, Том 4, номер 6
ISSN 2309-4265
(499) 755 50 99
http://mir-nauki.com

Остановимся кратко на их реализации.

Предлагаем учащимся следующие две практико-ориентированные задачи, которые могут заинтересовать каждого любознательного школьника. Решения этих задач сводятся к простейшим дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными, которые интегрируются непосредственно методом разделения переменных.

Задача 1. Катер двигался по озеру со скоростью 32 км/ч и через 1 минуту, после того как был выключен двигатель, его скорость стала равной 8 км/ч. Чему будет равна скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя, если сопротивление воды пропорционально скорости движения катера? Какое расстояние он пройдёт через 1 минуту после выключения мотора? Какое расстояние он пройдёт через 2 минуты после выключения мотора?

Проанализировав условие задачи, старшеклассники приходят к выводу, что необходимо найти, какова скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя, если сопротивление воды пропорционально скорости движения катера. На первом этапе предлагается ученикам составить математическую модель задачи.

Обозначив v - скорость движения катера, а k - коэффициент пропорциональности. По условию задачи, на движущийся катер действует сила $F = -k \cdot v$. С другой стороны, по второму закону Ньютона, эта сила $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$, где m - масса, а $\frac{dv}{dt}$ - ускорение. Следовательно, $m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v$ – есть дифференциальное уравнение (математическая модель), описывающее движение катера.

На втором этапе (решения задачи средствами математики внутри модели) старшеклассники решают дифференциальное уравнение методом разделения переменных.

В итоге, при $t = 2$, получим $v = 32 \cdot 4^{-60 \cdot \frac{1}{30}} = 32 \cdot 4^{-2} = 2$.

Третий этап - переход к осмыслению полученных результатов согласно условию задачи. Таким образом, скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя будет равна 2 км/ч.

Ответив на первый вопрос задачи, старшеклассники приступают к рассмотрению следующих вопросов: какое расстояние катер пройдёт через 1 минуту после выключения мотора? Какое расстояние он пройдёт через 2 минуты после выключения мотора?

Учащиеся переводят с языка сюжетной задачи на язык математических терминов, то есть строят математическую модель (дифференциальное уравнение).

Обозначим через S расстояние, которое катер будет проходить после остановки двигателя. Очевидно, что оно зависит от времени t, т.е. S=S(t), и в момент $t = 0$ остановки двигателя $S(0) = 0$. Так как, в силу физического смысла, скорость есть производная пути по времени, имеем

$$S' = 32 \cdot 4^{-60t}.$$

На втором этапе старшеклассники решают задачу внутри математической модели.

Интегрируем, с учетом, что $S(0) = 0$, получаем:

$$S = \int_0^t 32 \cdot 4^{-60x} dx = \int_0^t 4^{-60x} d(-60x) = -\frac{8}{15} \frac{4^{-60x}}{\ln 60}\bigg|_0^t = \frac{8}{15 \cdot \ln 60}[1 - 4^{-60t}].$$

2016, Том 4, номер 6
ISSN 2309-4265
(499) 755 50 99
http://mir-nauki.com

Для простоты вычислений положим $\ln 60 = 4$. Поэтому, из предыдущего равенства окончательно получаем: $S = \frac{2}{15}\left[1 - 4^{-60t}\right]$.

При $t = 1$, имеем $S = \frac{1}{10}$; при $t = 2$, имеем $S = \frac{1}{8}$.

Следуя третьему этапу метода математического моделирования, возвращаемся к сюжету задачи. Таким образом, через минуту после остановки двигателя катер пройдет 100 метров, а через 2 минуты после остановки двигателя катер пройдет 125 метров.

Рассмотрим полное решение задачи.

Решение. Пусть v - скорость движения катера, а k - коэффициент пропорциональности. По условию задачи, на движущийся катер действует сила $F = -k \cdot v$. С другой стороны, по второму закону Ньютона, эта сила $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$, где m - масса, а $\frac{dv}{dt}$ - ускорение. Следовательно,

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v \qquad (1.1)$$

есть дифференциальное уравнение (математическая модель), описывающее движение катера. Разделяя переменные и затем, интегрируя из (1.1), получим

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \cdot dt,$$

$$\ln|v| = \ln e^{-\frac{k}{m}t} + \ln C.$$

Значит, общее решение дифференциального уравнения (1.1) имеет вид:

$$v = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t}. \qquad (1.2)$$

Так как в момент времени $t = 0$ сек. скорость катера была $v = 32$ км/ч, а через одну минуту, т.е. при $t = 1\text{мин} = \frac{1}{60}$ ч она была $v = 8$ км/ч, то из общего решения (1.2), получаем:

$$32 = \mathrm{C} \text{ и } 8 = C \cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{60}}.$$

Значит,

$$\mathrm{C} = 32 \text{ и } 8 = 32 \cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{60}}, \text{ т.е. } 4^{-1} = e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{60}} \text{ или } e^{-\frac{k}{m}} = 4^{-60}.$$

Подставив в (1.2), имеем

$$v = 32 \cdot 4^{-60t}. \qquad (1.3)$$

При $t = 2$ мин $= \frac{1}{30}$ ч, из (1.3) получим

$$v = 32 \cdot 4^{-60\cdot\frac{1}{30}} = 32 \cdot 4^{-2} = 2.$$

Таким образом, скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя будет равна 2 км/ч.

Обозначим через S расстояние, которое катер будет проходить после остановки двигателя. Очевидно, что оно зависит от времени t, т.е. S=S(t), и в момент $t = 0$ остановки двигателя $S(0) = 0$. Так как, в силу физического смысла, скорость есть производная пути по времени, то используя формулу (1.3), имеем

$$S' = 32 \cdot 4^{-60t},$$

откуда интегрируя, с учетом, что $S(0) = 0$, получаем

Мир Науки
научный интернет-журнал

2016, Том 4, номер 6
ISSN 2309-4265

(499) 755 50 99
http://mir-nauki.com

$$S = \int_0^t 32 \cdot 4^{-60x} dx = -\frac{32}{60} \int_0^t 4^{-60x} d(-60x) = -\frac{8}{15} \frac{4^{-60x}}{\ln 60} \Bigg|_0^t = \frac{8}{15 \cdot \ln 60} [1 - 4^{-60t}].$$

Так как $\ln 60 = 4{,}094344562$, то для простоты вычислений можно считать $\ln 60 = 4$. Поэтому, из предыдущего равенства окончательно получаем:

$$S = \frac{2}{15} [1 - 4^{-60t}]. \qquad (1.4)$$

При $t = 1$мин $= \frac{1}{60}$ч из (1.4), имеем

$$S = \frac{2}{15} [1 - 4^{-1}] = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{10} \text{(км)},$$

т.е. через минуту после остановки двигателя катер пройдет 100 метров.

При $t = 2$мин $= \frac{1}{30}$ч из (1.4), имеем

$$S = \frac{2}{15} [1 - 4^{-2}] = \frac{2}{15} \cdot \frac{15}{16} = \frac{1}{8} \text{(км)},$$

т.е. через 2 минуты после остановки двигателя катер пройдет 125 метров.

Ответ: Через 2 минуты после остановки двигателя скорость катера будет 2 км/ч. и он пройдёт расстояние 125 метров, а через 1 минуту после остановки двигателя он пройдет расстояние 100 метров.

Замечание 1. Ученики могли предложить воспользоваться хорошо известной формулой $S = v \cdot t$, где v определяется по формуле (1.3), но она привела бы к ошибочным парадоксальным результатам: через минуту пройденной после остановки двигателя расстояние равнялось бы $\frac{2}{15}$ км, а через 2 минуты - $\frac{1}{15}$ км, т.е. расстояние бы уменьшилось, что невозможно. Здесь нужно обратить внимание учеников, что формула $S = v \cdot t$ справедлива для **равномерного** движения и в данном случае не применима.

Решение следующей задачи о работе хлебопекарни может также вызвать живой интерес у школьников.

Задача 2. В течение 20 минут температура вынутого из печи хлеба и помещенного на складе падает от 100^0 до 60^0. Температура воздуха на складе равна 20^0. Через сколько времени от момента охлаждения температура хлеба понизится до

1) 40^0?
2) 30^0?

Решение. Обозначим через S температуру хлеба. По условию задачи она зависит от времени t, т.е. $S = S(t)$. Так как, в силу закона Ньютона, скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды, то получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dS}{dt} = k \cdot (S - 20), \qquad (2.1)$$

где k есть коэффициент пропорциональности. Разделяя переменные, из (2.1), имеем

$$\frac{dS}{S-20} = k \cdot dt,$$

откуда в результате интегрирования находим

$$\ln|S - 20| = k \cdot t + \ln 20 \text{ или } S - 20 = C \cdot e^{k \cdot t}.$$

2016, Том 4, номер 6
ISSN 2309-4265

По условию задачи при $t = 0$ имеем $S = 100$. Поэтому из предыдущего равенства можно легко найти C:

$$100 - 20 = \mathrm{C} \cdot e^{0}, \text{ т.е. } \mathrm{C} = 80.$$

Следовательно,

$$S - 20 = 80 \cdot e^{k \cdot t}, \tag{2.2}$$

По условию задачи при $t = 20$ имеем $S = 60$. Поэтому из (2.2), имеем

$$60 - 20 = 80 \cdot e^{k \cdot 20}, \text{ т.е. } e^{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Таким образом, из (9.2), окончательно получаем

$$S - 20 = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}. \tag{2.3}$$

Из формулы (2.3) при $S = 40$ находим $t = 40$, а при $S = 30$ находим $t = 60$.

Ответ: Температура хлеба понизится до 40^{0} через 40 минут, а до 30^{0} через 60 минут.

Замечание 2. Анализ формулы (2.3) показывает, что с течением времени t температура S хлеба на складе не может стать ниже 20^{0}, т.е. ниже температуры воздуха на складе, и выше 100^{0}.

Таким образом, анализ полученных формул (1.3) и (2.3) показывает учащимся, что они адекватно описывают (математически моделируют) процессы, рассматриваемые в задачах 1 и 2.

Для усвоения метода математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений учащимся можно предложить решение еще ряда интересных и доступных для ясного понимания задач из книги [12].

Современное занятие в системе дополнительного образования - это время, когда дети сами ищут, спорят, сопоставляют, обобщают, делают выводы. Одним словом, активно участвуют в обсуждении того, что и как происходит в процессе решения практико-ориентированных задач [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аммосова Н.В. Некоторые аспекты подготовки учителей математики к работе в системе дополнительного образования школьников // Наука Кубани. - 2005. - №2. - С. 174-179.
2. Аммосова Н.В. Методико-математическая подготовка будущих учителей математики в соответствии с задачами современности: монография. - Астрахань: Изд-во АИПКП, 2-е изд., 2015. - 256 с.
3. Аммосова Н.В., Коваленко Б.Б. Интеграция деятельности общеобразовательных школ и учреждений дополнительного образования как фактор активизации процессов обучения и воспитания школьников // Проблемы математики, информатики, физики и химии: тезисы докл. XLI Всерос. конф. (Москва, 2005 г.). Педагогические секции. - М.: Изд-во РУДН, 2005. - С. 55-56.
4. Аммосова Н.В., Коваленко Б.Б. Обучение учащихся решению задач, допускающих неоднозначную трактовку условий / Гуманитарное и естественно-научное образование // Математика. Компьютер. Образование: Сб. науч. трудов. Выпуск 21, №2. - М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2014. - С. 5-10.
5. Аносов Д.В. Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем. - М.: МЦНМО, 2008. - 200 с.
6. Крюкова В.Л. Интеграция алгебраического и геометрического методов решения уравнений и неравенств в классах с углубленным изучением математики: Автореферат диссертация кандидата пед. наук. - Орел, 2005. - 20 с.
7. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и ее изучении. - М: Наука, 1977. - С. 112.
8. Шапиро И.М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики: Книга для учителя. - М.: Просвещение, 1990. - 96 с.
9. Izvorska D., Kovalenko B.B., Ammosova N.V. Использование мыслительных операций как базы синергетического подхода при обучении математике // Education, science and economics at universities, integration to international educational area: International conference. - Plock, Poland, 2008. - P. 246-250.
10. Burden P.R., Byrd D.M. Methods for Effective Teaching. - 2nd ed. - Boston-London: Allyn and Bacon, 1999. - 418 p.
11. Аммосова Н.В., Лобанова Н.И. Решение неопределенных уравнений первой степени с двумя неизвестными в системе дополнительного образования // Сибирский педагогический журнал. 2016. №2. С. 24-34.
12. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. - Минск: «Вышейшая школа», 1973. - 560 с.

Lobanova Natalia Ivanovna
MUDO «Center of extracurricular activities of Zelenokumsk», Russia, Zelenokumsk
Astrakhan state university, Russia, Astrakhan
E-mail: lobantchik@yandex.ru

Elements of the theory of differential equations in the system of supplementary education

Abstract. In the article on the example of studying the elements of the theory of differential equations described by one of the options to ensure the implementation of the principle of continuity and continuity in training to mathematics between schools and further education. For the purpose of training students in additional education system solving problems by means of differential equations, it shows the need for practice-oriented approach, which can significantly improve the efficiency of learning. This is facilitated by the system of selection of content of educational material to help students to evaluate the significance of, the practical relevance of the acquired knowledge and skills. The main methods of solving practical-oriented problems - mathematical modeling method, which consists of three main phases: translation problems with the proposed language of the story problem into the language of mathematical terms; solution to the problem of mathematics means; interpretation of the solution. The solutions of the practical-oriented problems leading to differential equations.

Keywords: differential equations; the continuity in teaching mathematics; the principle of continuity; additional education