Мир науки. Педагогика и психология / World of Science. Pedagogy and psychology https://mir-nauki.com

2023, Том 11, № 2 / 2023, Vol. 11, Iss. 2 https://mir-nauki.com/issue-2-2023.html

URL статьи: https://mir-nauki.com/PDF/31PDMN223.pdf

Ссылка для цитирования этой статьи:
Степаненко, Г. А. Об эффективности векторного метода при решении некоторых геометрических и алгебраических задач / Г. А. Степаненко, Т. А. Пономаренко, Д. Р. Сытникова // Мир науки. Педагогика и психология. — 2023. — Т. 11. — № 2. — URL: https://mir-nauki.com/PDF/31PDMN223.pdf

For citation:
Stepanenko G.A., Ponomarenko T.A., Sytnikova D.R. On the effectiveness of the vector method in solving some geometric and algebraic problems. *World of Science. Pedagogy and psychology*. 2023; 11(2): 31PDMN223. Available at: https://mir-nauki.com/PDF/31PDMN223.pdf. (In Russ., abstract in Eng.)

УДК 378

ГРНТИ 14.01

Степаненко Геннадий Алексеевич
ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт»
Филиал в г. Железноводске, Железноводск, Россия
Доцент кафедры «Гуманитарных и социально-экономических дисциплин»
Кандидат технических наук, доцент
E-mail: stepang46@mail.ru
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=737124

Пономаренко Татьяна Антоновна
ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт»
Филиал в г. Железноводске, Железноводск, Россия
Заместитель директора по учебной и научной работе
Кандидат педагогических наук, доцент
E-mail: tanyakmv2503@yandex.ru
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=728409

Сытникова Данута Ришардовна
ГБОУ СОШ № 291 г. Санкт-Петербурга, Санкт-Петербург, Россия
Учитель математики
E-mail: Danuta.sytnikova@mail.ru

Об эффективности векторного метода при решении некоторых геометрических и алгебраических задач

Аннотация. Статья посвящена вопросам приложения векторного метода при решении некоторых геометрических и алгебраических задач, который может стать эффективным средством подготовки старшеклассников к продолжению математического образования в высшей школе. Входной контроль знаний по математике у студентов первого курса показал, что самые низкие показатели относятся к геометрическому материалу. Отмечаются определенные причины снижения качества геометрического образования школьников. Во-первых, во многих школах исчез предмет «Черчение», который был обязательным предметом изучения в Советское время. Это помогало ученикам правильно изобразить рисунок к задаче, что являлось ощутимой долей к успеху. Во-вторых, теоретический материал в современных школьных учебниках по геометрии излагается в избыточном объеме и слишком строгим научным языком, непонятным большинству учащихся. В-третьих, на уроках школьники получают как правило набор алгоритмов для решения определенных стандартизированных задач и не понимают, откуда берутся заученные ими формулы и в чем их смысл. В-четвертых, чрезмерное увлечение цифровым образованием. Школьники без труда находят готовые решения задач в сети Интернет, переписывают их, не задумываясь и не вникая в суть решения. Как правило, методы решения из Интернет базируются на стандартных, не являются оптимальными и простые вещи объясняются сложным и трудно понятным языком. Показано, что координатно-векторный метод обладает рядом преимуществ перед другими, так как он не требует сложных геометрических построений в проекциях и использования вспомогательных теорем. Приводится необходимый минимум теоретических сведений из разделов линейной и векторной алгебры в элементарном изложении. В частности, небольшое расширение теоретического материала на знание свойств векторного и смешанного произведения векторов дополнительно упрощает решение многих стереометрических задач. С помощью векторов можно решать не только геометрические, но и алгебраические задачи, которые относятся к задачам олимпиадного уровня по математике для школьников.

Ключевые слова: математика; методы обучения; вектор; линейная и векторная алгебра; скалярное; векторное и смешанное произведение векторов; геометрические и алгебраические задачи; школьники

Введение

В последнее время многими преподавателями высшей школы отмечается, что уровень математической подготовки школьников существенно снижается. Это влечет за собой проблемы в освоении многих технических дисциплин. Особенно низкое качество подготовки школьников относится к геометрическому материалу, который на базовом уровне осваивают лишь 5 % учащихся. В качестве причин снижения качества геометрического образования школьников следует отметить исчезновение во многих школах предмета «Черчение», который был обязательным предметом изучения в Советское время. Это помогало ученикам правильно изобразить рисунок к задаче, что являлось ощутимой долей к успеху. Кроме того, теоретический материал в современных школьных учебниках по геометрии излагается в избыточном объеме и слишком строгим научным языком, непонятным большинству учащихся. Методы решения задач, как правило, базируются на стандартных (разбитых на определенные типы задач), которые считаются образцовыми решениями. В результате на уроках школьники получают набор алгоритмов для решения определенных стандартизированных задач и не понимают, откуда берутся заученные ими формулы и в чем их смысл. Чрезмерное увлечение цифровым образованием и доступность получения готового решения любой задачи из школьного учебника через сеть Интернет никаким образом не способствует развитию творческого мышления школьников.

Координатный метод был создан французским математиком Р. Декартом в XVII веке, а векторный метод сформировался в середине XIX века в работах немецкого геометра Г. Грассмана и ирландского математика У. Гамильтона. Понятие вектора и элементы векторной алгебры вошли в школьный курс математики в 60-е годы XX века в ходе реформы школьного математического образования. Современными авторами отмечается, что приложения векторов к решению геометрических задач могут стать эффективным средством подготовки старшеклассников к продолжению математического образования в высшей школе.

Немаловажным фактором повышения качества математического образования является рассмотрение методов и приемов решения геометрических задач с осуществлением различных подходов к типовым задачам и выбором их оптимальных решений.

Методы исследования

Одним из мощнейших методов в геометрии является векторный метод, предназначенный для изучения геометрических фигур на плоскости и в пространстве. «Геометрические задачи, для решения которых может быть применён векторный метод, подразделяются на два класса — аффинные задачи и метрические задачи. Аффинные задачи — это задачи, в которых речь идёт о принадлежности точек прямым, о коллинеарности точек (принадлежности нескольких точек одной прямой), о параллельности прямых, о пропорциональности отрезков. Метрические задачи — это задачи, в которых требуется найти длины отрезков и величины углов» [1, с. 28].

В школьных учебниках по геометрии (авторы: Погорелов А.В., Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др.) аффинные задачи решаются традиционными методами евклидовой геометрии. Авторы многих работ показывают, что доказательство некоторых утверждений и теорем проще проводить векторным методом [2–4]. Естественно, это требует от учеников дополнительных знаний новых терминов и понятий, не предусмотренных программой, таких, например, как линейная зависимость и независимость векторов, линейная комбинация векторов, ортонормированный базис, проекция вектора на ось и другие. «Конечно, если бы программой было предусмотрено изучение этих исключительно важных для векторного метода понятий, то многие формулировки, обоснования и приемы решения задач могли бы быть более компактными и лаконичными» [5, с. 73].

В приложениях векторной алгебры к решению геометрических задач можно выделить два методических подхода. Первый подход связан с расширением теоретического аппарата векторной алгебры, содержащегося в школьных учебниках. Например, в учебном пособии Е.В. Потоскуева[1] рассматриваются векторное и смешанное произведение векторов, матрицы и определители второго и третьего порядка. Второй подход реализован в пособии С.А. Шестакова[2]. В своем пособии он опирается только на операции сложения векторов, умножения вектора на число и скалярное произведение векторов, которые изучаются в школьных базовом и профильном курсах геометрии.

Большинство авторов придерживаются второго подхода [6–12]. При реализации первого подхода отмечается, что «при работе с координатно-векторным методом важно быстро и правильно составлять уравнение плоскости, проходящей через три точки. Если это осуществлять через систему линейных уравнений, то, как правило, возникают проблемы с нахождением неизвестных. Составление уравнения плоскости с использованием определителей третьего порядка более рационально и удобно в использовании» [13–15]. Следует отметить справочное пособие для школьников 5–11 классов, выпущенного издательством ДРОФА, в котором в краткой форме дано понятие определителя второго и третьего порядка, а также векторного и смешанного произведение векторов[3].

Мы рассмотрим ряд методов и приемов решения геометрических задач с осуществлением различных подходов к типовым задачам и выбором их оптимальных решений.

[1] Векторно-координатный метод решения задач стереометрии. ФГОС / Е.С. Потоскуев. — М.: Издательство «Экзамен», 2019. 223 с.

[2] Шестаков С.А. Векторы на экзаменах. Векторный метод в стереометрии. М.: МЦНМО, 2005. 112 с.

[3] Математика в формулах. 5–11 классы: справочное пособие. — 18-е изд., — Дрофа, 2013. 61 с.

Результаты исследования

Целью настоящего исследования является приведение необходимого минимума теоретических сведений из разделов линейной и векторной алгебры в элементарном изложении и примеров их приложения для решения некоторых геометрических и алгебраических задач.

1. Линейные алгебраические уравнения

Определение. Линейным алгебраическим уравнением называется уравнение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, где $x_1, x_2, ..., x_n$ — неизвестные, $a_1, a_2, ..., a_n$ — заданные числовые величины.

(*В линейном уравнении переменные входят в первых степенях.*)

Значения переменных, обращающие уравнение в истинное равенство (тождество), называются корнями уравнения.

Решить уравнение — значит найти множество его корней или доказать, что их нет. Это множество называют также решением уравнения.

Ограничимся рассмотрением линейных уравнений от одной, двух или трёх переменных. В общем виде такое уравнение можно записать следующим образом:

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (1)$$

Переменные $a, b, c, d,$ которые при решении уравнения (1) считаются постоянными, называются параметрами, а само уравнение называется уравнением, содержащим параметры.

Решить уравнение (1) — значит указать, при каких значениях параметров существуют значениях x, y, z, удовлетворяющие данному уравнению.

При решении уравнений будем пользоваться следующими правилами:

Если обе части уравнения умножить (*или разделить*) *на одно и то же число, не равное нулю, то получится новое уравнение, равносильное данному.*

Любое слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком.

1.1 Уравнение с одной переменной

$$ax = b. \qquad (2)$$

Возможны следующие случаи:

$a \neq 0$. Решение $x = \dfrac{b}{a}$ (единственный корень).

$a = 0,\ b \neq 0$. Уравнение имеет вид $0 \cdot x = b$. Решений нет (уравнение не имеет корней).

$a = 0$ и $b = 0$. Уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0$ т. е., x — любое действительное число, $x \in (-\infty; +\infty)$.

31PDMN223
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

1.2 Уравнение с двумя переменными

$$ax + by + c = 0. \qquad (3)$$

Это уравнение является общим уравнением прямой на плоскости:

если $a = 0$, прямая параллельна оси Ox ($y = -\frac{c}{b} = const$);

если $b = 0$, прямая параллельна оси Oy ($x = -\frac{c}{a} = const$);

если $c = 0$, прямая проходит через начало координат.

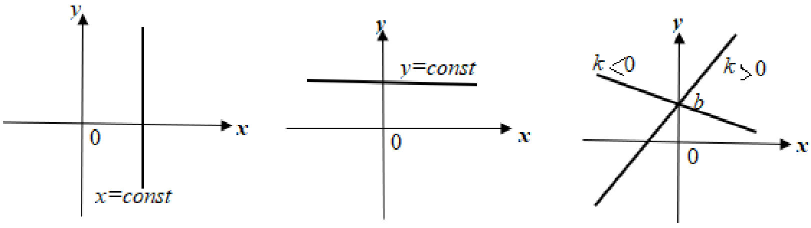
Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$,

k — тангенс угла наклона прямой к оси Ox, *проходящей через заданную точку* $A(x_0; y_0)$:

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

k — угловой коэффициент.

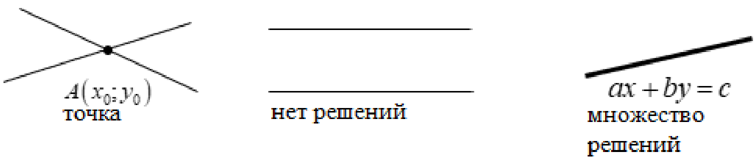
(*В уравнении с угловым коэффициентом отсутствует прямая* $x = const$).



1.3 Система линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}. \qquad (4)$$

Каждое из этих уравнений на плоскости представляет определенную прямую. Возможны три случая:



две прямые пересекаются — система имеет единственное решение ($a_1b_2 \neq a_2b_1$);

прямые параллельны — система не имеет решения ($a_1b_2 - a_2b_1 = 0;\ c_1 \neq c_2$);

две прямые совпадают — система имеет бесконечное множество решений $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

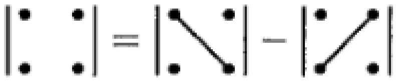
т. е. соответствующие коэффициенты уравнений пропорциональны. За множество решений системы принимается любое из этих двух равносильных уравнений.

1.4 Определитель второго порядка

Определитель обозначается символом **Δ** и вычисляется по правилу:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\,. \qquad (5)$$

При вычислении удобно пользоваться следующей схемой:



<u>Решение систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными</u>:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2\,. \end{cases}$$

Решение системы при условии единственного решения, когда основной определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ удобно проводить по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

В дополнительных определителях $\mathbf{\Delta_1}$ и $\mathbf{\Delta_2}$ столбец коэффициентов при соответствующих неизвестных заменяется столбцом свободных членов.

<u>Пример</u> <u>1</u>. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = 8\,. \end{cases}$$

Подсчитаем определитель системы $\mathbf{\Delta} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 9 = 13 \neq 0$ — система имеет единственное решение $x = \dfrac{\mathbf{\Delta_1}}{\mathbf{\Delta}}$, $y = \dfrac{\mathbf{\Delta_2}}{\mathbf{\Delta}}$. Подсчитаем дополнительные определители $\mathbf{\Delta_1} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 24 = 26;$ $\mathbf{\Delta_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 3 = 13$. Находим x и y:

$$x = \frac{26}{13} = 2\,, \quad y = \frac{13}{13} = 1.$$

Ответ: (2; 1).

31PDMN223
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Пример 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+3y=3 \\ 2x+6y=8 \end{cases}.$$

Определитель системы $\boldsymbol{\Delta}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=6-6=0$. Метод Крамера не применим.

Проведем равносильные преобразования системы: умножим обе части первого уравнения на минус 2 и сложим его со вторым уравнением, получим:

$$\begin{matrix}-2\\ \end{matrix}\begin{cases} x+3y=3 \\ 2x+6y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=3 \\ 0+0=2 \end{cases}.$$

Получили противоречие 0 = 2, следовательно система не имеет решения.

Прямые $x+3y=3$ и $2x+6y=8$ параллельны.

Ответ: нет решений.

Пример 3. Изменим данные второго уравнения из примера 3 и проведем аналогичные преобразования

$$\begin{cases} x+3y=3 \\ 2x+6y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=3 \\ 0+0=0 \end{cases}.$$

Противоречия нет, прямые $x+3y=3$ и $2x+6y=6$ совпадают.

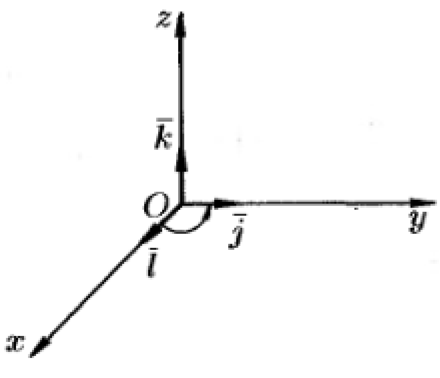
Общим решением системы будет выражение $x=3(1-y)$.

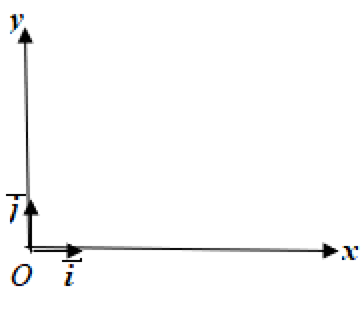
Ответ: $x=3(1-y)$.

2. Элементы векторной алгебры

2.1 Понятие вектора. Координаты вектора

При определении вектора будем использовать декартову прямоугольную систему координат:





31PDMN223
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

В пространстве любая точка имеет три координаты $M(x;y;z)$, а на плоскости — две координаты $M(x;y)$.

Вектор — направленный отрезок прямой $\overline{AB}$ с начальной точкой $A(x_1;y_1;z_1)$ и конечной точкой $B(x_2;y_2;z_2)$. Обозначение $\overline{AB}=\overline{a}$.

Координаты вектора: $\overline{AB}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ или $\overline{a}(a_x;a_y;a_z)$ — это проекции вектора на соответствующие оси координат.

Вектор $\overline{a}(a_x;a_y;a_z)$ можно записать в следующем виде $\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$.

Вектор можно переносить параллельно самому себе, при этом координаты вектора не изменяются, а начало вектора помещать в любую точку *O* пространства.

Длина (или модуль) вектора:

$$|\overline{a}|=|\overline{AB}|=\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2+(a_z)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \quad (7)$$

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором и обозначается в декартовой системе координат через $\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}$.

2.2 Линейные операции над векторами

Произведением вектора $\overline{a}$ на число λ называется вектор $\overline{b}=\lambda\overline{a}$, имеющий длину $|\overline{b}|=\lambda|\overline{a}|$, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно ему, если $\lambda<0$.

Сумма векторов определяется по известным правилам треугольника, параллелограмма или многоугольника (с соответствующими вычислениями через координаты их векторов).

2.3 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi. \quad (8)$$

Выражение скалярного произведения через координаты:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \quad (9)$$

Итак, *скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат*.

Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определятся по формуле:

$$cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2+(a_z)^2}\cdot\sqrt{(b_x)^2+(b_y)^2+(b_z)^2}}. \qquad (10)$$

Условие параллельности двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — пропорциональность их координат $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

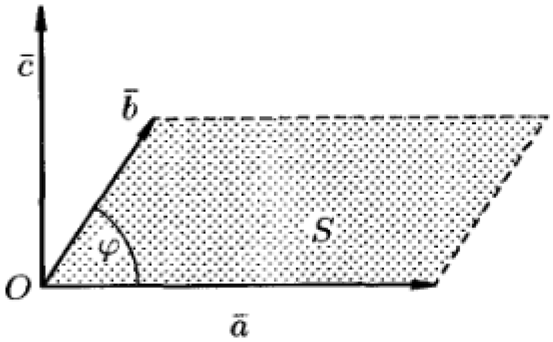
Условие перпендикулярности двух векторов $\bar{a} \perp \bar{b}$ $\left(\cos\frac{\pi}{2} = 0\right)$.

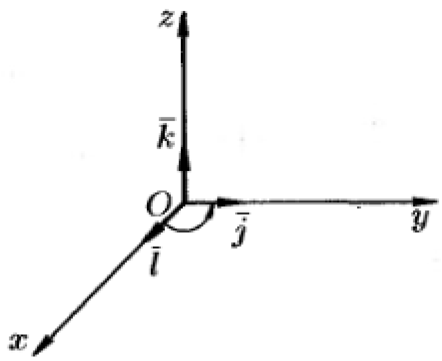
$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \qquad (11)$$

2.4 Векторное произведение

Векторным произведением $\bar{a}$ и $\bar{b}$, называется вектор $\vec{c}$, который:

1. Перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.
2. Имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах, т. е. $|\bar{c}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$.
3. Векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку.





Обозначения векторного произведения: $\bar{c} = \bar{a}\times\bar{b}$.

Выражение векторного произведения через координаты:

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\bar{k}. \qquad (12)$$

Здесь использовано разложение определителя третьего порядка по его первой строке.

Вычисление определителей второго порядка приведено в пункте 1.4.

Установление коллинеарности векторов.

Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = 0$ (и наоборот).

Нахождение площади параллелограмма и треугольника, построенных на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $S_{▱} = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$; $S_{\triangle} = \dfrac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$.

2.5 Смешанное произведение трех векторов

Смешанное произведение трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ здесь составлено следующим образом: первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор $\left(\bar{a} \times \bar{b}\right)\bar{c} = \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ и представляет собой число, которое равно определителю третьего порядка, составленного из координат этих векторов:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \tag{13}$$

$$= a_x\left(b_y c_z - b_z c_y\right) - a_y\left(b_x c_z - b_z c_x\right) + a_z\left(b_x c_y - b_y c_x\right) \quad .$$

Модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Условие компланарности трех векторов.

Если три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ лежат в одной плоскости, то $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$.

3. Геометрия

3.1 Основные правила

Нужно знать:

1. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.
2. Условие параллельности и перпендикулярности двух векторов.
3. Условие компланарности трёх векторов.

Для этого необходимо:

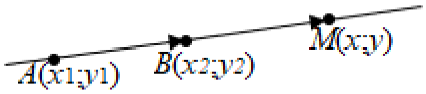
1. Изобразить на плоскости или в пространстве условия поставленной задачи.
2. Взять на искомой прямой или плоскости произвольную точку $M(x;\ y)$, или $M(x;\ y;\ z)$.
3. Найти либо два параллельных, либо два перпендикулярных, либо три компланарных вектора.

31PDMN223
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

4. Воспользовавшись условиями параллельности, перпендикулярности или компланарности векторов, записать полученное уравнение.

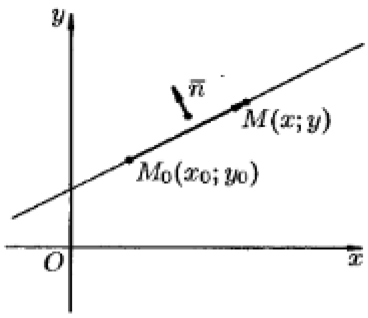
3.2 Уравнение прямой на плоскости

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$.



Используя пропорциональность координат у параллельных векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AM}$, запишем искомое уравнение: $\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}=\frac{(y-y_1)}{(y_2-y_1)}$, или $y=y_1+\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}(x-x_1)$. Из последнего выражения легко получить уравнение с угловым коэффициентом $y=kx+b$, где $k=\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\overline{n}(A;B)$.



Вектор $\overline{M_0M}(x-x_0;y-y_0)$ перпендикулярен вектору $\overline{n}(A;B)$, т. е. ($\overline{n}\cdot\overline{M_0M}=0$) или $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \Rightarrow\ Ax+By+C=0;\ C=-(Ax_0+By_0)$.

Общее уравнение прямой:

$$Ax+By+C=0. \tag{14}$$

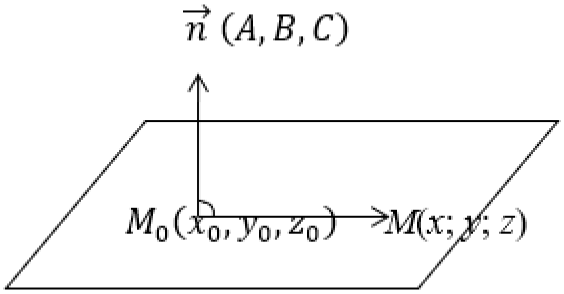
Нужно запомнить, что коэффициенты, стоящие перед переменными ***x*** и ***y***, — координаты нормального вектора $\overline{n}(A;B)$ (т. е. перпендикулярного к данной прямой).

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{15}$$

3.3 Уравнение плоскости в пространстве

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\overline{n}(A;B;C)$.



$$\overline{M_0M}\left(x-x_0;y-y_0;z-z_0\right);$$

$$\overline{n}\perp\overline{M_0M}\Rightarrow\overline{n}\cdot\overline{M_0M}=0 \text{ или } A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0.$$

Общее уравнение плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Коэффициенты при переменных в общем уравнении плоскости являются координатами ее нормального вектора $\overline{n}(A;B;C)$.

Условие параллельности двух плоскостей:

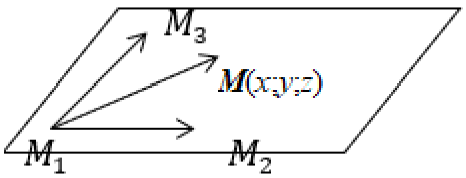
$$\overline{n_1}\left(A_1;B_1;C_1\right)\parallel\overline{n}_2\left(A_2;B_2;C_2\right)\Rightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$\overline{n_1}\left(A_1;B_1;C_1\right)\perp\overline{n}_2\left(A_2;B_2;C_2\right)\Rightarrow A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки:

$$M_1\left(x_1;y_1;z_1\right),\ M_2\left(x_2;y_2;z_2\right) \text{ и } M_3\left(x_3;y_3;z_3\right).$$



Три вектора $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ лежат в одной плоскости $\Rightarrow\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3}=0$ (смешанное произведение равно нулю).

$$\begin{array}{c} \overline{M_1M} \\ \overline{M_1M_2} \\ \overline{M_1M_3} \end{array}\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

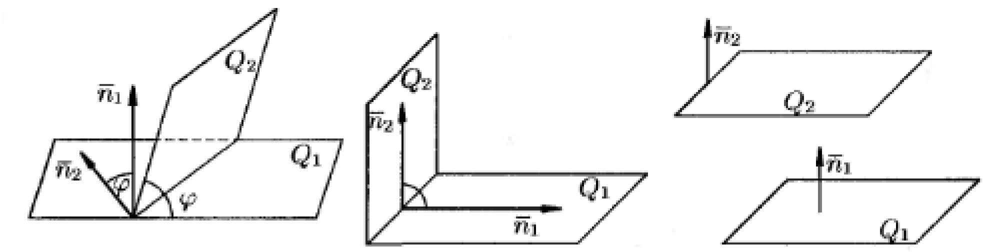
Разлагаем определитель по первой строке и после вычислений получаем общее уравнение плоскости в виде $Ax+By+Cz+D=0$.

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$:1

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{16}$$

Угол между двумя плоскостями:

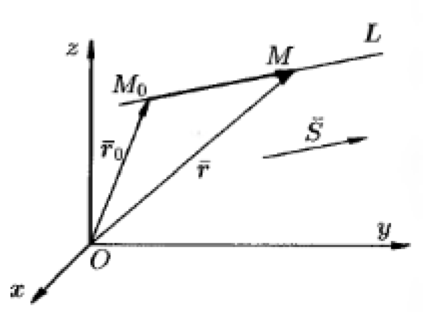
Это угол между их нормальными векторами $\overline{n}_1(A_1;B_1;C_1)$ и $\overline{n}_2(A_2;B_2;C_2)$



$$\cos\varphi=\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{|\overline{n_1}|\cdot|\overline{n_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{17}$$

3.4 Уравнение прямой в пространстве

Каноническое уравнение прямой в пространстве проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно направляющему вектору $\overline{S}(m,n,p)$:



Берем на прямой *L* произвольную точку $M(x;y;z)$.

Уравнение прямой можно записать в векторной форме $\overline{r}=\overline{r}_0+t\overline{s}$, которое называется каноническим уравнением прямой в пространстве.

Вектор $\overline{M_0M}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)\,||\,\overline{S}(m;n;p)\Rightarrow\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$.

Из последнего выражения получается параметрическое уравнение прямой в пространстве (переменная ***t*** является параметром).

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

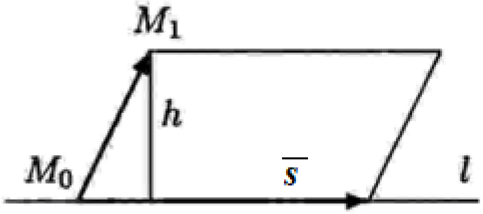
$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}. \qquad (18)$$

Угол между прямыми:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ и } \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2};$$

$$\cos\varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Расстояние от точки до прямой:



Расстояние $\rho(M_1, l)$ от точки M_1 до прямой ***l*** находится как высота ***h*** параллелограмма, построенного на векторах $\overline{S}(m, n, p)$ и $\overline{M_0 M_1}$, площадь и основание которого рассчитываются по известным формулам $S_{\square} = \left|\overline{S} \times \overline{M_0 M_1}\right|$, $\left|\overline{S}\right| = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$. Эти соотношения позволяют вычислить $\rho(M_1, l)$ по известным прямоугольным координатам

$$\rho(M_1, l) = \frac{\left|\overline{S} \times \overline{M_0 M_1}\right|}{\left|\overline{S}\right|}. \qquad (19)$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Определение: Две прямые называются *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости.

В учебниках нет единого определения расстояния между скрещивающимися прямыми. В зависимости от метода нахождения этого расстояния говорят, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно:

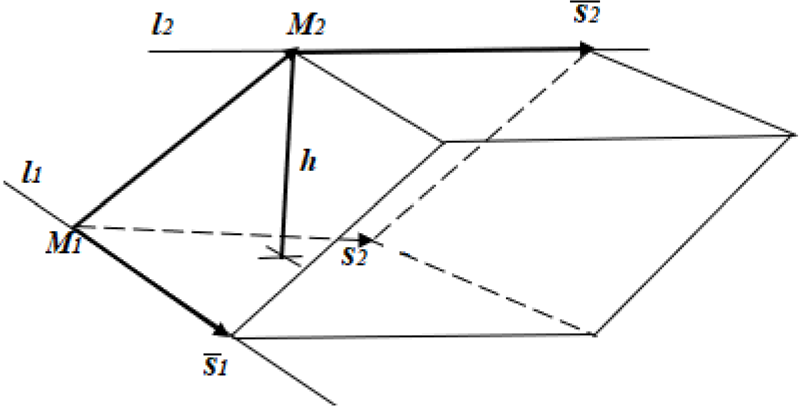
- длине отрезка их общего перпендикуляра (метод построения их общего перпендикуляра);
- расстоянию от какой-нибудь точки второй прямой до плоскости, содержащую одну из прямых и параллельную второй прямой (метод параллельных прямой и плоскости);
- расстоянию между параллельными плоскостями, в которых заключаются скрещивающиеся прямые (метод параллельных плоскостей);

31PDMN223
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

- длине ортогональной проекции второй прямой на плоскость, перпендикулярную первой прямой (метод ортогонального проектирования).

В основном используются различные подходы к этим четырем методам. Каждый из этих методов имеет определенные достоинства, обладает разной степенью сложности и наглядности и может широко использоваться в качестве опорных задач.

Мы считаем, что для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми наиболее простым и удобным является метод параллельных плоскостей на основе использования математического аппарата смешанного и векторного произведения.



Это расстояние $\rho\left(l_1,l_2\right)$ находится как высота параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{M_1M_2}$, $\overline{S_1}\left(m_1;n_1;p_1\right)$ и $\overline{S_2}\left(m_2;n_2;p_2\right)$, объем и площадь основания которого рассчитываются по известным формулам смешанного и векторного произведения в прямоугольных координатах:

$$\rho\left(l_1,l_2\right)=\frac{\left|\overline{M_1M_2}\cdot\overline{S_1}\cdot\overline{S_2}\right|}{\left|\overline{S_1}\times\overline{S_2}\right|}. \quad (20)$$

3.5 Пересечение прямой с плоскостью

Для того, чтобы найти точку пересечения прямой с плоскостью надо записать уравнение прямой в параметрическом виде.

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt\,. \end{cases}$$

Подставить эти выражения в уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ определить параметр ***t***, а затем найти значения ***x, y, z*** из параметрического уравнения прямой.

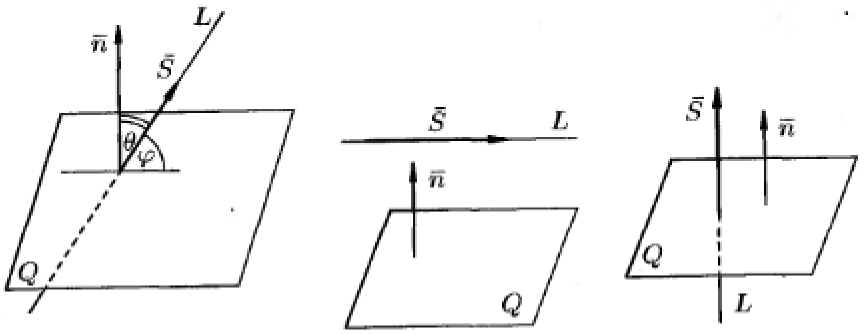
Замечания:

В случае, когда прямая параллельна плоскости $Am+Bn+Cp=0$.

а) Если $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, то прямая L пересекать плоскость не будет.

б) Если $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, то прямая лежит в плоскости.

Угол между прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$.



$$\bar{S}(m,n,p);\ \bar{n}(A;B;C);\ \theta+\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

$$\sin\varphi=\pm\cos\theta=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$\bar{n}\perp\bar{S}\Rightarrow\bar{n}\cdot\bar{S}=0,\ \text{т. е. } Am+Bn+Cp=0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\bar{n}\,||\,\bar{S}\Rightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

4. Решение геометрических задач

Пример 1. Найдите расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, длина ребра которого равна *a*.

Решение.

Введем прямоугольную систему координат как показано на рисунке 1.

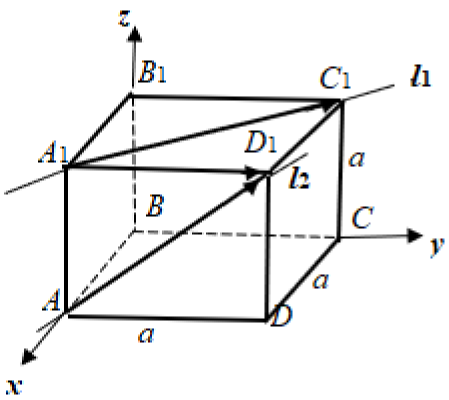


Рисунок 1

На скрещивающихся прямых l_1 и l_2 выбираем какие-либо (удобные) две точки, например, A_1 и D_1 (*точки* M_1 и M_2 *в формуле* (20)). Записываем координаты нужных точек и векторов.

$A(a;0;0)$, $A_1(a;0;a)$, $C_1(0;a;a)$, $D_1(a;a;a)$, $\overline{A_1D_1}(0;a;0)$. Направляющие векторы скрещивающихся прямых $\overline{s_1}=\overline{A_1C_1}(-a;a;0)$, $\overline{s_2}=\overline{AD_1}(0;a;a)$.

По формулам (12) и (13) находим векторное и смешанное произведения

$$\overline{s_1}\times\overline{s_2}=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ -a & a & 0\\ 0 & a & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 0\\ a & a\end{vmatrix}\bar i-\begin{vmatrix}-a & 0\\ 0 & a\end{vmatrix}\bar j+\begin{vmatrix}-a & a\\ 0 & a\end{vmatrix}\bar k=a^2\bar i+a^2\bar j-a^2\bar k;\quad \left|\overline{s_1}\times\overline{s_2}\right|=a^2\sqrt{3};$$

$$\left|\overline{A_1D_1}\cdot\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}\right|=\begin{vmatrix}0 & a & 0\\ -a & a & 0\\ 0 & a & a\end{vmatrix}=a^3.$$

А по формуле (20) расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба

$$\rho(l_1,l_2)=\frac{\left|\overline{A_1D_1}\cdot\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}\right|}{\left|\overline{s_1}\times\overline{s_2}\right|}=\frac{a^3}{a^2\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

<u>*Пример* 2</u>. (ЕГЭ, 2023).

«Сторона квадрата, лежащего в основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, равна 6, а боковое ребро равно 10. Точка *K* — середина ребра CC_1, на ребре BB_1 отмечена точка *L* так, что $BL:LB_1=2:3$.

а) Докажите, что плоскость *AKL* делит ребро DD_1 в отношении 1:9, считая от точки *D*.

б) Найдите угол между плоскостями *ABC* и *AKL*»[4].

Приведем два варианта решения этой задачи.

<u>*Вариант* 1</u>. *Стандартный, приведенный в пособии*[4], с. 201–203.

а) «Обозначим точки пересечения диагоналей нижнего и верхнего оснований через *O* и O_1 соответственно (рис. 2).

[4] Математика. Подготовка к ЕГЭ-2023. Профильный уровень. 40 тренировочных заданий по демоверсии 2023 года: учебно-методическое пособие / под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Калабухова. — Ростов-н/Д: Легион, 2022. — 368 с.

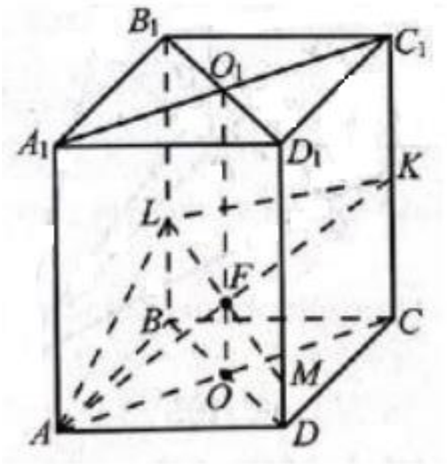


Рисунок 2

Плоскость AKL пересекает плоскость диагонального сечения AA_1C_1 по прямой AK, F — точка пересечения AK и OO_1, M — точка пересечения LF и DD_1 FO — средняя линия треугольника AKC (диагонали квадрата точкой пересечения делятся пополам, $AO=OC,\ OO_1 \| CC_1$, поэтому $FO \| KC$), $FO=\dfrac{KC}{2}=\dfrac{DD_1}{4}$. В трапеции $BLMD\left(BL \| MD\right)$ FO — средняя линия $\left(BO=OD, FO \| BL \| MD\right)$, $FO=\dfrac{BL+MD}{2}$.

$$\frac{DD_1}{4}=\frac{\frac{2DD_1}{5}+MD}{2},\quad \frac{DD_1}{4}=\frac{DD_1}{5}+\frac{MD}{2}, \text{ откуда } MD=\frac{DD_1}{10}.$$

Это означает, что плоскость AKL делит ребро DD_1 в отношении 1:9, считая от точки D.

б) AP — линия пересечения плоскостей AKL и ABC, где P — точка пересечения прямых BD и LM (рис. 3).

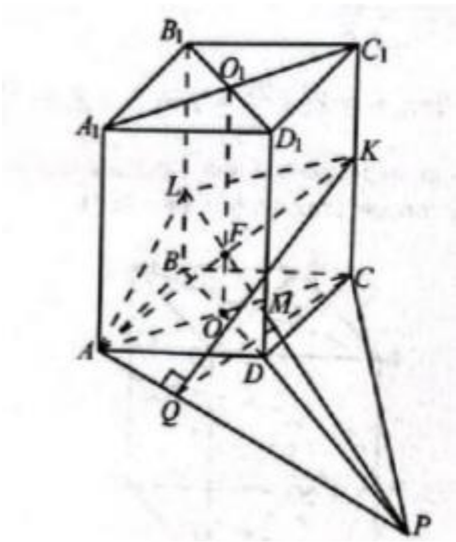


Рисунок 3

Проведем в плоскости AKL $KQ \perp AP$. По теореме о трех перпендикулярах $CQ \perp AP$ и $\angle KQC$ — угол между плоскостями ABC и AKL, $\angle KQC = arctg\dfrac{KC}{CQ}$.

$$\Delta BLP \sim \Delta MDP\left(BL \parallel MD\right): LB : MD = BP : DP\ \left(LB = 4, MD = 1, BD = 6\sqrt{2}\right),$$

$$\frac{4}{1} = \frac{6\sqrt{2} + DP}{DP}, 3DP = 6\sqrt{2}, DP = 2\sqrt{2}.$$

В треугольнике $ABP\left(\angle ABP = 45^{\circ}, BP = 8\sqrt{2}\right)$ по теореме косинусов

$$AP^2 = AB^2 + BP^2 - 2AB \cdot BP \cdot \cos\angle ABP = 36 + 128 - 2 \cdot 6 \cdot 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$
$$= 164 - 96 = 68.\ AP = 2\sqrt{17}.$$

В треугольнике ACP $AC \perp PO$ ($AC \perp BD$ как диагонали квадрата, $OP = 5\sqrt{2}$), тогда $AP \cdot CQ = AC \cdot PO,\ 2\sqrt{17} \cdot CQ = 6\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2},\ CQ = \dfrac{30}{\sqrt{17}}$,

$$\angle KQC = arctg\frac{5\sqrt{17}}{30} = arctg\frac{\sqrt{17}}{6}.$$

Ответ: $arctg\dfrac{\sqrt{17}}{6}$».

Вариант 2. Использование векторной алгебры.

а) Введем прямоугольную систему координат и отметим на рисунке 4 известные размеры заданных величин из условия задачи.

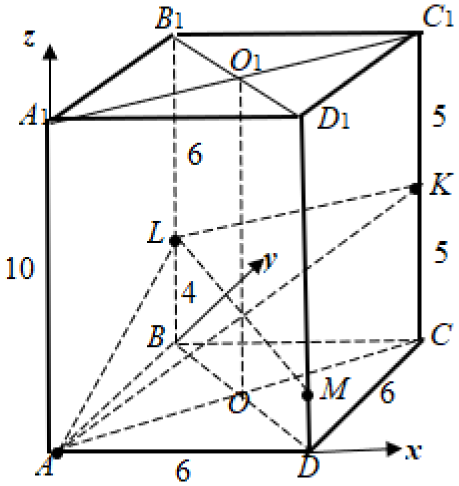


Рисунок 4

31PDMN223
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

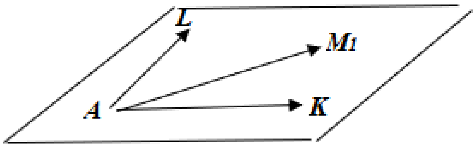
Так как по условию задачи точка K — середина ребра CC_1, а боковое ребро равно 10, то $CK = KC_1 = 5$. $BL : LB_1 = 2:3 \Rightarrow BL = 4, LB_1 = 6$ ($\frac{4}{6} = \frac{2}{3}, 4+6=10$).

Запишем координаты некоторых точек и координаты векторов, используемых для решения задачи.

$$A(0;0;0),\ L(0;6;4),\ K(6;6;5),\ D(6;0;0),\ D_1(6;0;10),$$

$$\overline{AL}(0;6;4),\ \overline{AK}(6;6;5),\ \overline{DD_1}(0;0;10).$$

Составим уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки A, L и K.



Возьмем на плоскости AKL произвольную точку $M_1(x;y;z)$. Векторы $\overline{AM_1}(x;y;z)$, $\overline{AK}(6;6;5)$ и $\overline{AL}(0;6;4)$ компланарны (лежат в одной плоскости), следовательно их смешанное произведение равно нулю.

$$\overline{AM_1} \cdot \overline{AK} \cdot \overline{AL} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & 6 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -6x - 24y + 36z = 0, \text{ или}$$

$$-x - 4y + 6z = 0.$$

Это уравнение является уравнением плоскости AKL. Нормальный вектор к плоскости $\overline{n_1}(-1;-4;6)$.

Найдем координаты точки M как точки пересечения прямой DD_1 с плоскостью AKL (см. п. 3.5). Составим каноническое уравнение прямой DD_1, проходящей через точку $D(6;0;0)$ по направлению вектора $\overline{DD_1}(0;0;10)$. За направляющий лучше взять вектор $\overline{S}(0;0;1) \,||\, \overline{DD_1}(0;0;10)$.

$$\frac{x-6}{0} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{1} = t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}.$$

Замечание: *наличие нулей в пропорции не означает деления на нуль, а предполагает равенство нулю их числителей.*

Подставим последние выражения переменных в уравнение плоскости AKL ($-6 - 0 + 6t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1$). Координаты точки $M(6;0;1)$, т. е. $DM = 1$, $MD_1 = 9$.

Это означает, что плоскость AKL делит ребро DD_1 в отношении 1:9, считая от точки D.

б) Угол между плоскостями *AKL* и *ABC* равен углу между их нормальными векторами $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$.

Уравнение плоскости *ABC*: $z = 0$. То есть $\overline{n_2}(0;0;1)$.

Нормальный вектор к плоскости *AKL*: $\overline{n_1}(-1;-4;6)$.

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}\right|}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|} = \frac{0+0+6}{\sqrt{1+16+36}\sqrt{0+0+1}} = \frac{6}{\sqrt{53}};\ \varphi = arc\cos\frac{6}{\sqrt{53}}.$$

<u>*Ответ*</u>: $\varphi = arc\cos\frac{6}{\sqrt{53}}$.

Для проверки совпадения ответов найдем $tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{36}{53}} = \sqrt{\frac{17}{53}};\ tg\varphi = \frac{\sqrt{17}\cdot\sqrt{53}}{\sqrt{53}\cdot 6} = \frac{\sqrt{17}}{6};$$

т. е. $tg\varphi = \frac{\sqrt{17}}{6}$ и ответы совпадают.

Отметим, что в традиционном стандартном способе решения требуется проводить достаточно сложные дополнительные геометрические построения (рис. 3), что является непреодолимым препятствием для многих школьников и студентов.

5. Решение алгебраических задач

При решении алгебраических задач с помощью векторов надо знать определение скалярного произведения векторов:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\varphi.$$

Из этого определения вытекает следующее важное свойство:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} \le \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|.$$

Равенство реализуется в том случае, когда $\cos\varphi = 1$, т. е. векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, $\varphi = 0$ (их координаты пропорциональны), модуль вектора $\left|\overline{a}\right|$; $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

<u>*Задача* 1.</u> Докажите неравенство $4\sqrt{a} + 3\sqrt{16-a} \le 20$ при любых $a \in [0;16]$. Когда достигается равенство?

Решение. Областью определения функции $y = 4\sqrt{a} + 3\sqrt{16-a}$ является отрезок $a \in [0;16]$. Введем векторы $\overline{m}\left(\sqrt{a};\sqrt{16-a}\right)$ и $\overline{n}(4;3)$. Получаем

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

$$\overline{m}\cdot\overline{n}\le\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|;$$

$$\overline{m}\cdot\overline{n}=4\sqrt{a}+3\sqrt{16-a}\le\sqrt{a+16-a}\cdot\sqrt{4^2+3^2}=4\cdot5=20, \text{ или}$$

$$4\sqrt{a}+3\sqrt{16-a}\le20.$$

Первая часть задачи доказана.

Наибольшее значение функции найдем из условия пропорциональности координат векторов $\overline{m}\left(\sqrt{a};\sqrt{16-a}\right)$ и $\overline{n}\left(4;3\right)$: $\frac{\sqrt{a}}{4}=\frac{\sqrt{16-a}}{3}\Rightarrow\frac{a}{16}=\frac{16-a}{9}$.

Т. е. $a=\frac{256}{25}$. Проверим найденное значение:

$$4\sqrt{\frac{256}{25}}+3\sqrt{16-\frac{256}{25}}=\frac{4\cdot16}{5}+\frac{3\cdot\sqrt{144}}{5}=\frac{100}{5}=20. \text{ Верно.}$$

Ответ: $a=\frac{256}{25}$.

Задача 2. Докажите, что если $a-b+c=6$, то $\sqrt{a+1}+\sqrt{2-b}+\sqrt{c+3}\le6$.

Решение. Введем векторы $\overline{m}\left(\sqrt{a+1};\sqrt{2-b};\sqrt{c+3}\right)$ и $\overline{n}\left(1;1;1\right)$.

Получаем $\overline{m}\cdot\overline{n}\le\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|$;

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{2-b}+\sqrt{c+3}\le\sqrt{a+1+2-b+c+3}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}.$$

Преобразуем правую часть неравенства, учитывая, что $a-b+c=6$,

$$\sqrt{a+1+2-b+c+3}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{\left(a-b+c\right)+6}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{12\cdot3}=6.$$

Таким образом, мы доказали неравенство

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{2-b}+\sqrt{c+3}\le6.$$

Решение некоторых алгебраических задач с использованием вектора можно найти в статье [16].

Обсуждение

Показано, что координатно-векторный метод обладает рядом преимуществ перед другими, так как он не требует сложных геометрических построений в проекциях и использования вспомогательных теорем. Векторный метод позволяет учащимся с недостаточно развитыми пространственным воображением и пространственным мышлением в какой-то мере компенсировать эти недостатки.

Приведен необходимый минимум теоретических сведений из разделов линейной и векторной алгебры в элементарном изложении. В частности, небольшое расширение теоретического материала на знание свойств векторного и смешанного произведения векторов дополнительно упрощает решение многих стереометрических задач и может стать эффективным средством подготовки старшеклассников к продолжению математического образования в высшей школе.

При работе с координатно-векторным методом важно быстро и правильно составлять уравнение плоскости, проходящей через три точки. Если это осуществлять через систему линейных уравнений, то, как правило, возникают проблемы с нахождением неизвестных. Нужно решить систему трех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными. Составление уравнения плоскости с использованием смешанного произведения векторов и вычисления определителя третьего порядка более рационально и удобно в использовании.

Если бы школьной программой было предусмотрено изучение этих исключительно важных для векторного метода понятий, то многие формулировки, обоснования и приемы решения задач могли бы быть более компактными и лаконичными.

С помощью векторов можно решать не только геометрические, но и алгебраические задачи, которые относятся к задачам олимпиадного уровня по математике для школьников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Игошин В.И. О точках и векторах в геометрии / Игошин В.И. //Математическое образование. 2017. № 2(82). С. 27–43.
2. Клековкин Г.А. Преемственность школы и вуза на примере школьного геометрического образования / Клековкин Г.А. // Образование и наука. 2013. № 5(104). С. 133–149.
3. Клековкин Г.А. Школьное геометрическое образование: вопросы преемственности / Клековкин Г.А. // Инновационные проекты и программы в образовании 2014/5. С. 38–43.
4. Качагина К.С. Векторный метод решения задач в геометрии / Качагина К.С. // Актуальные научные исследования в современном мире. 2020. № 5-2(61). С. 182–185.
5. Дорофеев С.Н. Аналогия как основа обучения школьников векторному методу решения геометрических задач / Дорофеев С.Н., Есетов Е.Н., Наземнова Н.В. // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. № 4(41). С. 70–82.
6. Парилова М.В. Об обучении учащихся профильной школы координатно-векторному методу решения геометрических задач / Парилова М.В., Коровина В.Г. Успехи современного естествознания. 2011. № 8. С. 185.
7. Астапов И.С. Решение геометрических задач векторным методом / Астапов И.С., Астапов Н.С. // Математика в школе. 2020. № 1. С. 43–49.
8. Данилова Н.А. Обучение школьников решению геометрических задач векторным методом / Данилова Н.А., Султакаева И.С. // В сборнике: Фундаментальные основы инновационного развития науки и образования. сборник статей IV Международной научно-практической конференции. 2019. С. 212–214.

9. Шарафиева Э.Ф. Преимущества векторного метода при решении геометрических задач / Шарафиева Э.Ф. // Форум молодых ученых. 2018. № 5-3(21). С. 892–896.

10. Сидорякина В.В. О некоторых методических особенностях обучения школьников решению геометрических задач векторным методом / Сидорякина В.В., Тулинова О.А., Кружилина Е.В. // Вестник Таганрогского института имени А.П. Чехова. 2017. № 1. С. 261–266.

11. Великасова Д.А. К вопросу о применении координатно-векторного метода при решении стереометрических задач / Великасова Д.А. // Modern Science. 2019. № 5-2. С. 70–76.

12. Аширбаев Н.К. Векторные решения некоторых геометрических задач / Аширбаев Н.К., Фахритдинова Д.А., Аширбаева Ж.Н. / Вестник науки Южного Казахстана. 2020. № 1(9). С. 210–216.

13. Ильиченко А.А. Использование аппарата аналитической геометрии при решении задач школьного курса / Ильиченко А.А. // Вестник Тюменского государственного института культуры. 2019. № 1(11). С. 177–179.

14. Ильиченко А.А. Использование аппарата аналитической геометрии при решении задач школьного курса / Ильиченко А.А., Мальцева И.А. // В сборнике: Проблемы научно-практической деятельности. Перспективы внедрения инновационных решений. сборник статей всероссийской научно-практической конференции. 2019. С. 180–183.

15. Долматова Т.А. Эффективность координатно-векторного метода решения стереометрических задач / Долматова Т.А., Филонова К.А. // В сборнике: Актуальные вопросы современной науки и образования. сборник статей VII Международной научно-практической конференции: в 2 ч. Пенза 2021. С. 120-122.

16. Рахимов Н.Н. Решение некоторых алгебраических задач с использованием вектора / Рахимов Н.Н., Райимкулов П.М., Хакназарова Х.К. // International Ccientific Review. 2017. № 1(32). С. 11–13.

Stepanenko Gennady Alekseevich
Stavropol State Pedagogical Institute
Branch in Zheleznovodsk, Zheleznovodsk, Russia
E-mail: stepang46@mail.ru
RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=737124

Ponomarenko Tatyana Antonovna
Stavropol State Pedagogical Institute
Branch in Zheleznovodsk, Zheleznovodsk, Russia
E-mail: tanyakmv2503@yandex.ru
RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=728409

Sytnikova Danuta Rishardovna
GBOU secondary school No. 291 of Saint Petersburg, Saint Petersburg, Russia
E-mail: Danuta.sytnikova@mail.ru

On the effectiveness of the vector method in solving some geometric and algebraic problems

Abstract. The article is devoted to the application of the vector method in solving some geometric and algebraic problems, which can become an effective means of preparing high school students to continue their mathematical education in higher education. The input control of knowledge in mathematics among first-year students showed that the lowest indicators relate to geometric material. Certain reasons for the decline in the quality of geometric education of schoolchildren are noted. Firstly, in many schools the subject «Drafting», which was a compulsory subject of study in Soviet times, disappeared. This helped the students to correctly depict the picture for the problem, which was a tangible share of success. Secondly, the theoretical material in modern school textbooks on geometry is presented in excessive volume and in too strict scientific language, incomprehensible to most students. Thirdly, in the classroom, schoolchildren usually receive a set of algorithms for solving certain standardized problems and do not understand where the formulas they memorized come from and what their meaning is. Fourth, the over-enthusiasm for digital education. Schoolchildren can easily find ready-made solutions to problems on the Internet, rewrite them without thinking and without delving into the essence of the solution. As a rule, solution methods from the Internet are based on standard ones, are not optimal, and simple things are explained in a complex and difficult to understand language. It is shown that the coordinate-vector method has a number of advantages over others, since it does not require complex geometric constructions in projections and the use of auxiliary theorems. The necessary minimum of theoretical information from the sections of linear and vector algebra is given in an elementary presentation. In particular, a slight extension of the theoretical material to the knowledge of the properties of the vector and mixed product of vectors additionally simplifies the solution of many stereometric problems. Using vectors, you can solve not only geometric, but also algebraic problems, which are related to the tasks of the Olympiad level in mathematics for schoolchildren.

Keywords: mathematics; teaching methods; vector; linear and vector algebra; scalar; vector and mixed product of vectors; geometric and algebraic problems; pupils