Мир науки. Педагогика и психология / World of Science. Pedagogy and psychology https://mir-nauki.com

2025, Том 13, № 1 / 2025, Vol. 13, Iss. 1 https://mir-nauki.com/issue-1-2025.html

URL статьи: https://mir-nauki.com/PDF/14PDMN125.pdf

5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования) (педагогические науки)

Ссылка для цитирования этой статьи:
Степаненко, Г. А. Комбинаторика и вероятность в школьном курсе математики. Стратегии решения задач / Г. А. Степаненко, Т. А. Пономаренко, Д. Р. Сытникова // Мир науки. Педагогика и психология. — 2025. — Т. 13. — № 1. — URL: https://mir-nauki.com/PDF/14PDMN125.pdf

For citation:
Stepanenko G.A., Ponomarenko T.A., Sytnikova D.R. Combinatorics and probability in the school mathematics course. Problem solving strategies. *World of Science. Pedagogy and psychology*. 2025;13(1): 14PDMN125. Available at: https://mir-nauki.com/PDF/14PDMN125.pdf. (In Russ., abstract in Eng.)

УДК 519.1; 519.2

ГРНТИ 14.01.13

Степаненко Геннадий Алексеевич
ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт», Железноводск, Россия
Доцент кафедры «Гуманитарных и социально-экономических дисциплин»
Кандидат технических наук, доцент
E-mail: stepang46@mail.ru
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=737124

Пономаренко Татьяна Антоновна
ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт», Железноводск, Россия
Заместитель директора по учебной и научной работе
Кандидат педагогических наук, доцент
E-mail: tanyakmv2503@yandex.ru
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=728409

Сытникова Данута Ришардовна
ГБОУ Средняя общеобразовательная школа № 291 г. Санкт-Петербурга, Санкт-Петербург, Россия
Учитель математики
E-mail: Danuta.sytnikova@mail.ru

Комбинаторика и вероятность в школьном курсе математики. Стратегии решения задач

Аннотация. Статья посвящена проблемам математического образования в школах России. Авторами отмечается, что в настоящее время теория вероятностей из стен высших и специальных учебных заведений переходит во все наши средние школы. Изложение элементов учения о теории вероятностей в общеобразовательных школах не требует введения так называемой «высшей» математики. Школьники могут легко усвоить два правила комбинаторики (правило суммы и правило произведения) и логически применять их при решении вероятностных задач, не запоминая специальных формул. Простыми комбинаторными методами могут решаться трудные задачи, имеющие занимательную формулировку и неожиданные ответы. Приводятся интересные классические задачи из «старых» книг. В данной статье сделана попытка показать также логическую аналогию теории множеств и теории вероятностей, используя геометрическое понятие вероятности события и диаграммы Эйлера-Венна. При решении задач сделан основной акцент на материалы ОГЭ и ЕГЭ, поскольку именно они отражают требования к прохождению государственной итоговой аттестации.

Отмечается неверное решение некоторых комбинаторных задач в сборнике «ЕГЭ Тематический тренажер, Математика. Профильный уровень. Теория вероятностей и элементы статистики» авторы А.Р. Рязановский, Д.Г. Мухин.

Ключевые слова: комбинаторика; вероятность события; математика; диаграммы Эйлера-Венна; стратегии решения задач; методы обучения; школьники

Введение

В настоящее время теория вероятностей из стен высших и специальных учебных заведений переходит во все наши средние школы. Изложение элементов учения о теории вероятностей в общеобразовательных школах не требует введения так называемой «высшей» математики. Подтверждением этого служит попытка (к сожалению, не вполне законченная) проф. В.П. Ермакова. В 1884–85 году в издававшемся им тогда «Журнале элементарной математики» уважаемый профессор поместил две статьи из теории вероятностей в элементарном изложении [1; 2].

Русским популяризаторам математических знаний давно уже пора бы пойти по пути, указанному в этом отношении нашим талантливым ученым, а педагогам заняться составлением элементарного курса теории вероятностей, приноровленного к школьным требованиям. Не следует стремиться сразу к строго логическому обоснованию того или иного математического факта. Для школы вполне приемлемы интуитивно ясные определения понятий события, вероятности события и «логические скачки через интуицию», обеспечивающие необходимую доступность учебного материала. Это — классический методический принцип русской педагогики.

Мы поддерживаем появление в школе курса по теории вероятностей и статистике. По данной дисциплине для общеобразовательных учебных заведений выпущены соответствующие пособия. Отметим некоторые из них. Теория вероятностей и статистика: 7–9-е классы / И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко; под ред. И.В. Ященко[1]; Тюрин Ю.Н. Теория вероятностей и статистика. Экспериментальное учебное пособие для 10 и 11 классов общеобразовательных учреждений[2]; Бунимович Е.А., Булычев В.А. Вероятность и статистика. 5–9 классы: Пособие для общеобразовательных. учеб. заведений[3]; Бунимович Е.А., Булычев В.А. Вероятность и статистика в школьном курсе математики. Учебник для 7–11 классов общеобразовательных учреждений.[4]

Ранее по теории вероятностей и статистической обработке данных выпускались дополнительные параграфы к курсу алгебры.[5]

---

[1] Высоцкий И.Р. Теория вероятностей и статистика: 7–9-е классы: учебное пособие / И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко; под ред. И.В. Ященко. — 3-е изд. стер. — М.: Просвещение, 2023. — 272 с. ISBN 978-5-09-097585-8.

[2] Тюрин Ю.Н. Теория вероятностей и статистика. Экспериментальное учебное пособие для 10 и 11 классов общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2014. — 248 с. ISBN 978-5-4439-0724-6.

[3] Бунимович Е. А., Булычев В. А. Вероятность и статистика. 5–9 классы: Пособие для общеобразоват. учеб. заведений. М.: Дрофа, 2002. — 160 с.

[4] Бунимович Е.А., Булычев В.А. Вероятность и статистика в школьном курсе математики. Учебник для 7–11 классов общеобразовательных учреждений. Часть 1. — М., Издательство ООО «ДОС», 2008. — 197 с.

[5] Мордкович А.Г. События. Вероятности. Статистическая обработка данных: Дополнительные параграфы к курсу алгебры 7–9 кл. общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. — 5-е изд. — М.: Мнемозина, 2008. — 112 с. ISBN 978-5-346-01012-8.

Эти учебные пособия содержат очень большой объем информации до 520 страниц. На первом месте выступает слишком обширная статистика и вычисление средних характеристик величин. К понятию вероятности события школьники приходят после изучения этой темы. Более того, в рамках отведенных часов учителю нет никакой возможности изложить предлагаемый в пособиях материал по вероятности.

Мы надеемся на дальнейшие подвижки в сфере образования с разработкой учебников, охватывающих все теоретические аспекты, предлагаемые для усвоения школьниками, и образцы подробного решения всех типов задач, используемых в образовательном процессе. При этом в учебниках материал должен быть «разложен» по годам и количеству часов обучения соответствующих тем курса. В этом плане следует отметить краткое и понятное учебное пособие для самообразования С.М. Балакирева.[6]

Методы исследования

Изучался методический подход по формированию знаний учащихся по основам теории вероятностей и вычисления комбинаторных соединений в популярном изложении. Это две статьи профессора В.П. Ермакова, опубликованные в России в журнале элементарной математики в 1884 и 1885 гг. [1, 2]. Это перевод книги П.С. Лапласа «Опыт философии теории вероятностей. Популярное изложение основ теории вероятностей и ее приложений» [3], изданной в 1908 г. Это одна из научно-популярных книг российского и советского педагога-математика Е.И. Игнатьева [4]. Следует отметить также книгу А.Н. Колмогорова, И.Г. Журбенко, А.В. Прохорова «Введение в теорию вероятностей» [5], две познавательные книги Т. Варги из серии «Математические игры и опыты» [6; 7], Ф. Мостлера «Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями» и Г. Секей «Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике» [8; 9]. Все эти издания относятся к периоду СССР и заслуживают особого внимания педагогов.

Следует сказать несколько слов о комбинаторике, без которой освоение теории вероятностей не имеет смысла. Без комбинаторики теория вероятностей суха и, честно говоря, однобока [10]. Школьники могут легко усвоить два правила комбинаторики (правило суммы и правило произведения) и логически применять их при решении вероятностных задач, не запоминая специальных формул. Простыми комбинаторными методами могут решаться трудные задачи, имеющие занимательную формулировку и неожиданные ответы.

С методической точки зрения о реализации линии теории вероятности, комбинаторики и статистики в основном общем образовании при математической подготовке школьников можно отметить публикации [11–17].

Результаты исследования

Отметим главные понятия, которые должен усвоить школьник.

<u>1. Основные виды случайных событий.</u>

Человека окружает мир событий. **Любой** результат испытания называется ***исходом***, который, собственно и представляет собой появление определенного события. Событие, которое при реализации данного комплекса условий **может произойти**, **а может и не произойти**, называется ***случайным событием***.

---

[6] Балакирев С.М. Теория вероятностей для школьников (с абсолютного нуля): учебное пособие. При поддержке творческого объединения «Самообразование» self-edu.ru, 2019. — 73 с.

14PDMN125
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

События обозначают большими буквами латинского алфавита: $A, B, C, D, E...$ либо теми же буквами с подстрочными индексами, например: $A_1, A_2, A_3, \ldots$. При этом стараются избегать буквы *P*, которая зарезервирована для обозначения вероятности события.

События называют ***достоверными***, если они происходят ***неизбежно*** (***обязательно***) в результате каждого испытания, и ***невозможными***, если в результате испытания они ***вовсе не могут произойти***.

Например, если в урне находятся все белые шары, то:

A — вынуть белый шар — событие достоверное;

B — вынуть черный шар — событие невозможное.

Важной характеристикой случайных событий является их ***равновозможность***. Два или несколько событий называют равновозможными, если ни одно из них не является более возможным, чем другое. Например:

- выпадение орла или решки при броске монеты;
- выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при броске игрального кубика.

Два события называют ***совместными***, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Например: при бросании кубика событие *A* — появление четырех очков, событие *B* — появление четного числа очков. В этом случае события *A* и *B* — совместные.

События называют ***несовместными***, если в результате испытания осуществление одного из них исключает появление остальных.

Например, при бросании монеты событие *A* — выпадение герба и событие *B* — выпадение решки — несовместные, осуществление одного из них исключает появление другого.

Случайные события образуют ***полную группу событий***, если при каждом испытании может осуществиться любое из них и не может осуществиться событие, несовместное с ними.

Примером полной группы событий является выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти или шести очков при одном бросании кубика.

События $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$, образующие полную группу *попарно несовместных и равновозможных* событий, называют ***элементарными***.

Элементарные события такой группы называют ***благоприятствующими осуществлению события*** *A*, если осуществление любого из элементарных событий влечет за собой осуществление события *A*.

Например, при бросании кубика события A_2, A_4, A_6 благоприятствуют осуществлению события *A* — выпадение четного числа очков. Множество всех элементарных событий обозначается Ω и называется ***пространством элементарных событий***.

Два события называют ***противоположными***, если они несовместны и образуют полную группу.

Событие, противоположное данному, обычно обозначается той же латинской буквой с чёрточкой наверху:

A — в результате броска монеты выпадет орёл;

$\overline{A}$ — в результате этого же броска выпадет решка (не выпадет орёл).

Противоположные события легко формулируются из соображений элементарной логики: в каждом конкретном испытании событие может произойти **или** не произойти — третьего не дано!

Два события *A* и *B* называют ***независимыми***, если вероятность осуществления события *A* не зависит от того, осуществилось событие *B* или нет.

Несколько событий называются ***попарно независимыми***, если любые два из них независимые.

Событие *B* называют ***зависимым от события*** *A*, если вероятность осуществления события *B* **зависит** от того, осуществилось или нет событие *A*.

2. Алгебра событий.

При описании алгебраических операций над событиями будем использовать теоретико-множественную интерпретацию. Всё пространство случайных событий будем изображать в виде прямоугольника, а интересующие нас события — в виде кругов внутри этого прямоугольника. Такое изображение называют диаграммами (или кругами) Эйлера-Венна.

В теории вероятностей для обозначения суммы двух событий используется традиционный арифметический знак +, а в теории множеств ему соответствует знак $\bigcup$, который означает объединение множеств. В теории вероятностей для произведения событий используется знак умножения в виде точки $\cdot$ между буквами, обозначающими события, а в теории множеств ему соответствует знак $\bigcap$, который означает пересечение рассматриваемых множеств. Как и в алгебре, знак умножения между буквами можно не писать. Совокупность элементов множества, так же, как и событий, обозначается заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$. Черта над буквой соответствует отрицанию (дополнению).

Полезно запомнить следующее **важнейшее правило**:

Сложение событий обозначает логическую связку **ИЛИ**, а **умножения событий** — логическую связку **И**.

1. ***Суммой*** (объединением) двух событий *A* и *B* называется событие $A + B$ (или $A \cup B$), состоящее в наступлении события *A*, **или** события *B*, **или** обоих событий вместе (точнее — в наступлении по крайней мере одного из событий *A* или *B*).

Обозначение $C = A + B$ или $C = A \cup B$.

В общем случае суммой (объединением) событий называется событие *A*, состоящее в появлении **хотя бы одного** из событий $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ (**или** A_1, **или** A_2, **или** A_3, ... **или** A_n, **или** нескольких из них, **или** всех).

Запись: $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ или $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

2. ***Произведением*** (пересечением) двух событий называется событие, состоящее в совместном появлении этих событий

$$C = A \cdot B \text{ или } C = A \cap B.$$

Часто для простоты записи точку между буквами опускают и произведение записывают $C = AB$.

Произведением (пересечением) нескольких событий $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ называется событие *A*, состоящее в одновременном выполнении всех событий $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$

14PDMN125
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

$$A = A_1 A_2 A_3 \cdot \ldots \cdot A_n \text{ или } A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n .$$

Произведение $A = A_1 A_2 A_3 \cdot \ldots \cdot A_n$ подразумевает, что при определенных условиях произойдет **и** событие A_1, **и** событие A_2, **и** событие A_3, …, **и** событие A_n.

При решении задач удобно разбить всю рассматриваемую совокупность объектов на классы (**попарно не пересекающиеся подмножества**).

На рисунке 1 показано разбиение на классы по двум признакам *A* и *B* или по трем признакам *A*, *B* и *C*.

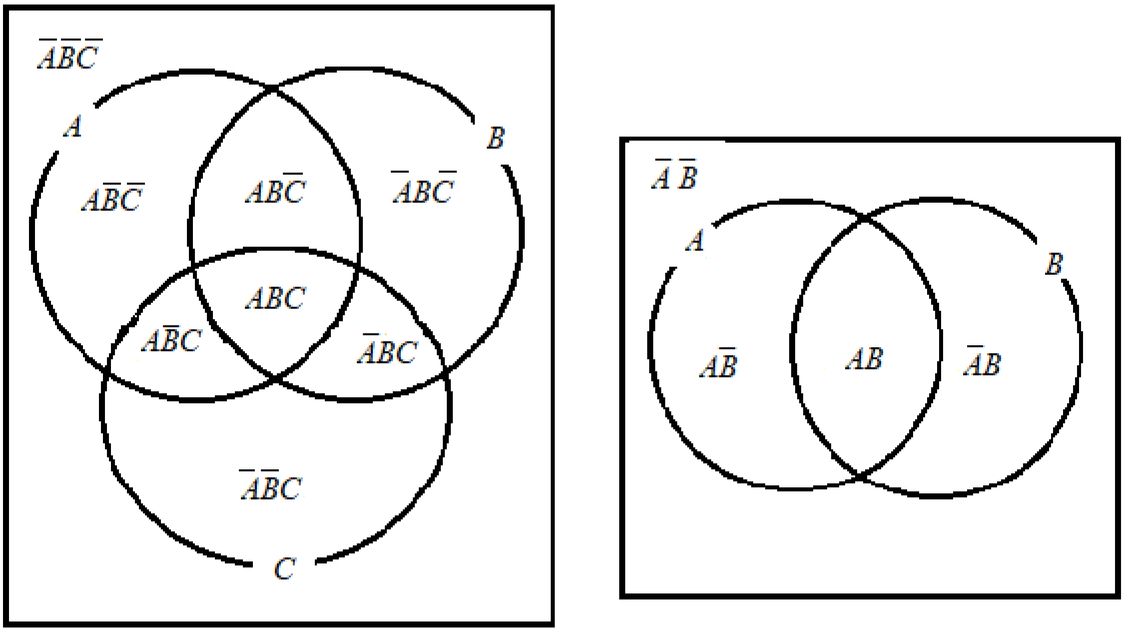

Рисунок 1. *Диаграммы Эйлера-Венна (составлено авторами)*

Осмысливаем и проговариваем вслух!!

При разбиении по двум признакам *A* и *B* получаются 4 класса объектов:

$A\bar{B}$ — элементы обладают признаком *A* и **не** обладают признаком *B*;

AB — элементы обладают признаком *A* **и** обладают признаком *B*;

$\bar{A}B$ — элементы **не** обладают признаком *A* **и** обладают признаком *B*;

$\bar{A}\bar{B}$ — элементы **не** обладают признаками *A* **и** *B* (область за кругами в прямоугольнике).

При разбиении по трем признакам *A*, *B* и *C* возможно получить 8 классов объектов, которые трактуются аналогичным способом, например, $A\bar{B}\bar{C}$ — элементы обладают признаком *A* и **не** обладают признаками *B* **и** *C* (черта над признаком означает его отрицание) и т. д., $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ — элементы **не** обладают всеми тремя признаками *A*, *B* и *C*.

Так как классы попарно не пересекающиеся подмножества, то события, определяемые этими классами, являются попарно несовместными.

Нужно всегда иметь ввиду, что если в задачах требуется найти вероятность события *A* ***или*** *B*, то это сумма событий *A* + *B*. Если речь идет о нахождении вероятности события *A* ***и*** *B*, то это произведение событий *AB*.

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

В теории множеств, в теории вероятностей и в математической логике выполняются законы де-Моргана:

$$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B};\quad \overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$$
$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B};\qquad \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}.$$

Эти законы часто используются при решении многих задач.

3. Классическое определение вероятности.

Вероятностью случайного события *A* в некотором испытании называется отношение числа *m* ***элементарных*** исходов испытания, ***благоприятствующих*** событию *A*, к общему числу *n* ***всех возможных элементарных*** исходов, определенных данным испытанием.

$$P\left(A\right)\ =\frac{m}{n}.$$

Предполагается, что элементарные исходы образуют ***полную группу событий*** и ***равновозможны***.

Впервые это определение, дошедшее до нас практически без изменений, появилось в работах Джироламо Кардано и Пьера Лапласа.

При использовании этой формулы нужно **четко усвоить** определение **элементарных** событий: **они должны быть попарно несовместны и образовывать полную группу**.

Важнейшей предпосылкой для использования классического определения вероятности является **возможность подсчёта общего количества исходов**.

4. Статистическое определение вероятности.

Рассмотрим серию из *n* испытаний, проведенных в одних и тех же условиях. Допустим, что нас интересует определенное событие *A*. Если в серии испытаний событие *A* осуществилось *m* раз, то отношение

$$W\left(A\right)=\frac{m}{n}.$$

числа появлений события *A* к общему числу проведенных испытаний данной серии называется ***относительной частотой*** события *A* в этой серии испытаний.

Опыт показывает, что событию *A* (при обеспечении независимости исходов отдельных опытов) присуща простейшая статистическая закономерность. Относительная частота события *A* в *n* испытаниях обнаруживает при больших *n* свойство стабильности: различные серии испытаний дают весьма близкие значения относительной частоты и в каждой серии значения ее мало изменяются с ростом *n*. Наличие такой закономерности свидетельствует о том, что относительные частоты представляют собой результаты измерений некоторой постоянной $P\left(A\right)$, которая называется вероятностью события *A*.

Статистической вероятностью события *A* называется то неизвестное число $P\left(A\right)$, около которого группируются значения относительных частот наступления события *A* **при возрастании числа испытаний**.

Отметим, что вероятность не стоит путать с частотой появления событий. Например, при бросании монетки нужно помнить, что значение 0,5 по вероятности для герба (или решки) достигается только для бесконечного числа экспериментов. А для любого конечного числа, пусть даже и относительно большого, это правило может даже близко не соблюдаться. Допустим, что во время игры с подбрасыванием симметрической монетки вы заметили, что «герб» выпал 10 раз подряд. Неважно сколько раз подряд до этого выпадал герб, вероятность выпадения решки при последующем броске остается прежней и равна 0,5.

Количество элементов в объединении множеств определяется по формуле включения-исключения (ограничимся рассмотрением только двух множеств)

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(AB).$$

Разделив обе части этого выражения на n, получим формулу для вычисления вероятности суммы событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Если множества не пересекаются $m(AB) = 0$. Для несовместных событий $P(AB) = 0$. Тогда $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

В заданиях ЕГЭ встречаются задачи на нахождение произведения вероятностей зависимых событий. Вероятность того, что событие B осуществилось при условии, что осуществилось событие A, будем обозначать $P\left(B/A\right)$ и называть *условной вероятностью* события B, при условии A.

«Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило».

$$P(AB) = P(A) \cdot P\left(B/A\right).$$

Если события независимые, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

При решении вероятностных задач полезно знать общие правила комбинаторики, их всего два.

Комбинаторика

Комбинаторикой называется раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций можно составить из элементов, выбранных из заданного множества, подчиненных определенным условиям.

В теории вероятностей принято говорить не о комбинациях, а о выборках. Множество, из которого выбираются элементы, называют генеральной совокупностью. В генеральной совокупности могут находиться все различные элементы или некоторые элементы могут повторяться. Поэтому различают выборки (или комбинации) без повторений и выборки с повторениями.

В комбинаторике рассматриваются следующие виды выборок: размещения, сочетания и перестановки. При подсчете числа различных комбинаций или различных способов выбора пользуются общими правилами комбинаторики.

5. Общие правила комбинаторики.

Правило суммы. Если некоторый объект *A* можно выбрать *m* способами, а объект *B* - *k* способами (не такими как *A*), то объект «**либо** *A*, **либо** *B*» можно выбрать $m+k$ способами.

$$n = m + k.$$

Допустим, что в одной вазе лежат 5 яблок, а в другой вазе 4 груши. Произвольным образом выбираем один фрукт. Сколькими разными способами можно это сделать?

В данной задаче мы выбираем 1 фрукт (**или** яблоко, **или** грушу). Логическая связка **или**. Действует правило суммы. Всего способов 5 + 4 = 9.

Правило произведения. Если объект *A* можно выбрать *m* способами, а после каждого такого выбора другой объект *B* можно выбрать (независимо от выбора объекта *A*) *k* способами, то пары объектов «*A* **и** *B*» можно выбрать $m \cdot k$ способами.

$$n = m \cdot k.$$

Бросаются две игральные кости. Сколько различных вариантов выпадения числа очков?

Так как на каждой из костей по шесть очков (1, 2, 3, 4, 5, 6) и они реализуются независимо друг от друга, то общее число вариантов равно $6 \cdot 6 = 36$.

Рассмотрим несколько типовых задач на правило произведения из книги Е.И. Игнатьева [4].

Задача 1. Размещение пассажиров.

«*Четверо пассажиров входят в вагон, в котором 6 свободных мест. Сколькими способами они могут разместиться?*».

Решение. Первый пассажир может занять любое из 6-ти мест. Значит, второй — любое из 5-ти мест; третий — любое из 4-х мест и четвертый — любое из трех. Каждое из таких размещений можно сочетать с каждым из остальных, и искомое число, следовательно, будет:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

Задача 2. Выбор предметов.

«*Сколькими способами можно сделать выбор, если брать по несколько или все из n данных предметов?*».

Решение. С каждым предметом можно поступить двояко: или брать его, или не брать. Каждый подобный способ обращения с одним предметом можно сочетать с каждым способом обращения с каждым из остальных предметов. Значит, искомое число было бы $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$ (*n* множителей) = 2^n. Но отсюда надо исключить случай, когда не берут ни одного предмета. Итак, искомое число есть $2^n - 1$.

Задача 3. «*Имея 6 приятелей, сколькими способами можно пригласить их на обед, приглашая или всех, или некоторых?*».

Решение. Задача, очевидно, есть частный случай предыдущей, искомое число есть $2^6 - 1 = 63$.

Задача 4. «*Сколькими способами **n** предметов могут быть розданы **p** лицам, если относительно числа вещей, которое может получить каждый, нет никаких ограничений?*».

Решение. Каждая вещь имеет ***p*** назначений. Следовательно, искомое число есть p^n.

Задача 5. «*Сколькими способами 5 вещей могут быть распределены между 2-мя лицами?*».

Решение. Первая вещь может быть дана либо одному, либо другому лицу, вторая также и т. д. Значит, получается 2^5 способов. Но из этого числа надо исключить 2 случая, когда только то или другое лицо получает все 5 вещей. Исключая эти 2 случая, находим, что число способов есть $2^5-2=30$.

Задача 6. «*Имеется 3 ореха, 4 яблока и 2 апельсина. Сколько будет комбинаций для выбора, если предлагают взять, по меньшей мере, по одной штуке каждого лакомства?*».

Решение. Предлагается взять один или боле орехов, одно или более яблок, один или более апельсинов. Из предыдущих задач мы уже знаем, что выбор каждого рода соответственно будет $2^3-1=7,\ 2^4-1=15,\ 2^2-1=3.$ Каждый выбор одного рода комбинируется с каждым выбором других родов. Искомое число, значит, равно $7\cdot 15\cdot 3=315.$

Генеральная совокупность без повторений и выборки без повторений

Генеральная совокупность без повторений — это набор некоторого конечного числа различных элементов $a_1, a_2, \dots a_n$.

Выборкой объема $m\ (m \le n)$ будем называть произвольную группу из *m* элементов данной генеральной совокупности.

Размещениями без повторений из ***n*** элементов по ***m*** называются такие выборки, которые, имея по *m* элементов, выбранных из числа данных *n* элементов генеральной совокупности без повторений, **отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения** (в выборке важен и состав элементов, и порядок их расположения).

Число размещений из *n* элементов по *m* обозначается A_n^m. По правилу произведения

$$A_n^m = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}_{m \text{ сомножителей}}.$$

Эту формулу можно записать в другом виде, более удобную для запоминания:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},$$

где ***n!*** — это произведение чисел от 1 до *n.* Читается «***эн — факториал***». $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$, причем принято считать, что **0! = 1**.

В случае, когда ***n = m***, одно размещение от другого **отличается только порядком расположения элементов** (состав не меняется, важен только порядок). Такие размещения называют ***перестановками без повторений***.

Число перестановок объема *n* обозначаются

$$P_n = A_n^n = n!.$$

Сочетаниями без повторений из *n* элементов по ***m*** называются такие размещения без повторений из *n* элементов по *m*, которые одно от **другого отличаются хотя бы одним элементом (порядок не важен)**.

14PDMN125
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Число сочетаний обозначается символом $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$; $C_n^m \cdot P_m = A_n^m$, или $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}$.

Свойства сочетаний: $C_n^m = C_n^{n-m}$ — симметрия; $C_n^0 = 1$ и $C_n^n = 1$; $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Генеральная совокупность с повторениями и выборки с повторениями

Генеральная совокупность с повторениями — это набор элементов *n* различных классов, когда элементы, принадлежащие одному классу, считаются одинаковыми: *а, а, а, … а; в, в, в, … в*; … ℓ, ℓ, ℓ, ℓ, … ℓ (1-й класс; 2-й класс; *n*-й класс).

Размещениями с повторениями из элементов *n* классов по ***m*** называются такие выборки, которые, имея по *m* элементов, выбранных из числа элементов данных *n* классов генеральной совокупности с повторениями, **отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения**.

Число таких размещений обозначается $\tilde{A}_n^m$ (для комбинаций с повторениями вверху буквы ставится специальный символ в виде волны $\tilde{A}$).

По правилу произведения первый элемент какого-нибудь из упомянутых размещений мы можем выбрать *n* различными способами: некоторый элемент любого из *n* классов. Второй элемент тоже *n* различными способами: опять некоторый элемент любого из *n* классов и так далее. Размещения объема *m* можно построить n^m способами, поэтому:

$$\tilde{A}_n^m = n^m.$$

Сочетаниями с повторениями из элементов ***n*** классов по ***m*** называются такие размещения с повторениями из элементов *n* классов по *m*, которые одно от другого **отличаются хотя бы одним элементом** (порядок не важен). Число таких сочетаний обозначим $\tilde{C}_n^m$.

Удобно пользоваться формулой, которая выражает связь числа сочетаний с повторениями через число сочетаний без повторения элементов.

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

Перестановками с повторениями по *k* элементов из ***n*** различных классов называются размещения с повторениями объема *k*, которые одно от другого отличаются только порядком расположения элементов, когда от *i*-го класса в каждой выборке участвует k_i элементов $(k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n)$.

Число таких перестановок обозначим $P_{k_1, k_2, \ldots k_n}$.

При взаимной перестановке элементов одного класса новые перестановки не получаются, поэтому число перестановок с повторениями будет в определенное число раз меньше *k*!

$$P_{k_1, k_2, \ldots k_n} = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!}.$$

В данной статье мы не будем останавливаться на простейших задачах, связанных с выбором пирожков, ручек, машин, чашек, выученных и невыученных уроков. Где-то на пятой задаче обучающийся перестает думать и строит ответ почти бессознательно, выхватывая взглядом нужные данные и автоматически подставляя в числитель и знаменатель конкретные числа.

Приведем несколько задач, связанных с логическими рассуждениями, наглядным представлением пространства элементарных событий и стратегией организации данных при подсчетах вариантов комбинаций.

Задача 1. «*Клиент получает в банке кредитную карту. Три последние цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что эти последние три цифры идут подряд в порядке убывания, например 876 или 432?*» (ЕГЭ 2023 профильный уровень).

Решение. Эта задача на комбинаторику. По правилу произведения всего возможных комбинаций последних трех цифр номера карты $n = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. Число благоприятных событий, удовлетворяющих условию задачи, легко найти простым подбором: 987, 876, 765, 654, 543, 432, 321, 210. То есть $m = 8$ и вероятность того, что эти последние три цифры идут подряд в порядке убывания равна

$$P = \frac{8}{1000} = 0{,}008.$$

Задача 2. «*Ваня бросил игральный кубик, и у него выпало больше 2 очков. Петя бросил игральный кубик, и у него выпало меньше 6 очков. Найдите вероятность того, что у Пети выпало очков больше, чем у Вани*» (ЕГЭ 2024 профильный уровень).

Решение. Рекомендуем воспользоваться *стратегией визуального представления* данных эксперимента.

Таблица 1

Результаты бросков кубиков Вани и Пети

		Ваня			
		3	**4**	**5**	**6**
Петя	**1**				
	2				
	3				
	4	+			
	5	+	+		

Составлено авторами

Всего вариантов $n = 4 \cdot 5 = 20$; благоприятных случаев $m = 3$ (отмечены знаком +). Вероятность того, что у Пети выпало очков больше, чем у Вани $P = \frac{m}{n} = \frac{3}{20} = 0{,}15$.

Задача 3. «*Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 6. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых*» (ЕГЭ 2024 профильный уровень).

Решение. Имеем ввиду, что при первом броске больше 6 выпасть не может. При двух бросках общее количество всех равновозможных элементарных исходов испытания $n = 6 \cdot 6 = 36$.

Табличка вариантов с подсчетом суммы выпавших очков, превышающих число 6 при двух бросках, приведена ниже.

14PDMN125
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Таблица 2

Результаты суммы выпавших очков, превышающих число 6 при двух бросках

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1						**7**
2					**7**	**8**
3				**7**	**8**	**9**
4			**7**	**8**	**9**	**10**
5		**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
6	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

Составлено авторами

Считаем количество нужных клеток с записанными числами: $m = 21$.

Вероятность того, что при двух бросках сумма выпавших очков превысит число 6, равна:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} \approx 0{,}58.$$

Задача 4. «*Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 9. Какова вероятность того, что для этого потребовалось три броска? Ответ округлите до сотых*» (ЕГЭ 2024 профильный уровень).

Решение. При трёх бросках **общее** количество всех возможных элементарных исходов испытания: $\boldsymbol{n = 6^3 = 216}$.

Мы должны определить количество благоприятных исходов испытания только при **трёх** бросках. Предварительно составим табличку суммы выпавших очков при двух бросках игральной кости, исключив из нее случаи, в которых сумма выпавших очков могла превысить число 9 (это 10, 11 и 12).

Справа от таблички укажем варианты третьего броска и алгоритм подсчета элементарных исходов, удовлетворяющих условию задачи (сумма всех очков при трёх бросках больше числа 9).

Таблица 3

Алгоритм подсчета суммы выпавших очков, превышающих число 9 при трех бросках

	1	2	3	4	5	6
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	
5	**6**	**7**	**8**	**9**		
6	**7**	**8**	**9**			

6: *(считаем клетки 9, 8, 7, 6, 5 и 4) =**24 + 3 = 27***

5: *(считаем клетки 9, 8, 7, 6 и 5) =**20 + 4 = 24***

4: *(считаем клетки 9, 8, 7 и 6) =**15 + 5 = 20***

3: *(считаем клетки 9, 8 и 7) = **9 + 6 = 15***

2: *(считаем клетки 9 и 8) = **4 + 5 = 9***

1: *(считаем клетки 9) = 4*

Третий бросок

Составлено авторами

Количество **благоприятных** случаев: $\boldsymbol{m} = \mathbf{4 + 9 + 15 + 20 + 24 + 27 = 99}$.

Вероятность того, что для этого потребовалось три броска

$$P = \frac{m}{n} = \frac{99}{216} \approx 0,46.$$

Задача 5. «*В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,2. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,05. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах*» (ЕГЭ 2024 профильный уровень).

Решим задачу двумя способами.

1. С использованием диаграммы Эйлера-Венна.

Для решения такого типа задач удобно представить пространство всех событий в виде диаграммы (рис. 2).

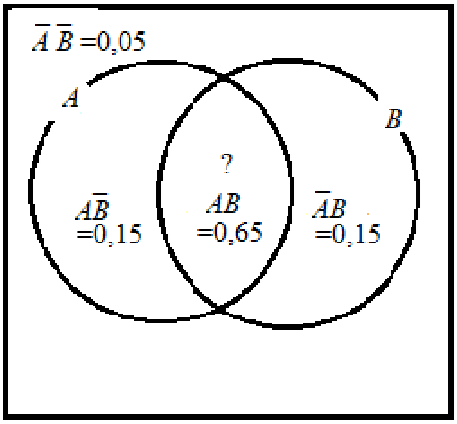

Рисунок 2. *Диаграмма Эйлера-Венна пространства всех событий (составлено авторами)*

Изображенные на диаграмме события означают следующее:

$\overline{A}\,\overline{B}$ — кофе нет (закончилось) в двух автоматах;

$A\overline{B}$ — кофе есть в первом автомате, а во втором закончилось;

$\overline{A}B$ — кофе закончилось в первом автомате, а во втором есть;

AB — кофе осталось в обоих автоматах.

Все эти события попарно несовместны и образуют полную группу событий

$$P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right) + P\left(A\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}B\right) + P\left(AB\right) = 1.$$

$P\left(A\overline{B}\right) = P\left(\overline{A}B\right) = 0,2 - 0,05 = 0,15$ (так как вероятность отсутствия кофе в каждом из двух автоматах равна 0,2). Заполняем диаграмму и определяем вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах

$$P\left(AB\right) = 1 - P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right) - P\left(A\overline{B}\right) - P\left(\overline{A}B\right) = 1 - 0,05 - 0,15 - 0,15 = 0,65.$$

2. С использованием формул теории вероятностей (традиционный).

Школьники должны понять следующие факты. По условию задачи $P(\overline{A})=P(\overline{B})=0,2$. Так как $P(\overline{A}\overline{B})\neq P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$, то события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ зависимые. Вероятность объединения (суммы) двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$P(\overline{A}+\overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B})=0,2+0,2-0,05=0,35.$$

Мы нашли вероятность события $P(\overline{A}+\overline{B})=P(\overline{AB})$ «кофе закончилось хотя бы в одном автомате» (закончилось **или** в первом автомате, **или** во втором автомате, **или** в обоих автоматах). Противоположным событием будет AB

$$P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-0,35=0,65.$$

Второй способ решения задачи менее понятен школьникам, чем первый способ, в котором присутствуют элементы наглядности изображения всех возможных событий.

Графический подход является эффективным методом анализа вероятностных моделей, и навык его использования является полезным для обучающегося.

Приведем несколько интересных задач, при решении которых целесообразно использовать элементы комбинаторики.

Задача 6. «*Сколькими способами можно разложить 6 одинаковых яиц по 3 различным корзинам? Корзины можно оставлять пустыми*».

Решение. Применим стратегию организации данных при подсчете возможных вариантов комбинаций яиц в корзинах. Если в каких-либо корзинах лежат по несколько одинаковых яиц, то при перестановке этих корзин новой комбинации не возникает. Такие комбинации называются перестановками с повторениями. Например, в данной задаче количество перестановок $P_{2,1}=\frac{P_3}{P_2}=\frac{3!}{2!}=3$. Если во всех корзинах разное количество яиц, считаем количество перестановок без повторений $P_3=3!=1\cdot2\cdot3=6$.

Результаты такого перебора представлены в таблице 4.

Таблица 4

Возможные варианты комбинаций яиц в корзинах

Комбинация яиц в корзинах			**Количество различных перестановок**
I	**II**	**III**	
0	0	6	3
0	1	5	6
0	2	4	6
0	3	3	3
1	1	4	3
1	2	3	6
2	2	2	1
итого			**28**

Составлено авторами

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Итак, количество способов, которыми можно разложить 6 одинаковых яиц по 3 различным корзинам при условии, что корзины можно оставлять пустыми равно 28.

Это количество можно подсчитать по формуле сочетаний с повторениями. В сочетаниях важен только состав элементов, порядок их не важен

$$\tilde{C}_3^6 = C_8^6 = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$$ <u>*Ответ*</u> 28.

Изменим несколько условие предыдущей задачи и придадим ей вероятностный характер.

<u>Задача 7.</u> «*Шесть одинаковых яиц раскладываются по трем различным корзинам таким образом, чтобы пустых корзин не осталось. Какова вероятность того, что во всех корзинах будет одинаковое число яиц?*».

<u>Решение.</u> Для того, чтобы корзины не оставались пустыми, надо в них положить по одному яйцу, а затем в случайном порядке раскладывать остальные яйца. Таких вариантов 10 (см. таблицу в предыдущей задаче). Или это количество можно подсчитать также по формуле сочетаний с повторениями

$$\tilde{C}_3^3 = C_5^3 = C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

Из этих 10 вариантов благоприятным является один $P = \frac{1}{10} = 0{,}1.$

<u>Примечание.</u> В тематическом тренажере ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Теория вероятностей и элементы статистики. Авторы А.Г. Рязановский, Д.Г. Мухин [18, с. 54, № 11, 12] приведены две аналогичные задачи с раскладыванием 48 яиц по 6 различным корзинам.

К сожалению, <u>ответы указаны неверные</u>:

$$\tilde{C}_{48}^6 = C_{53}^6 = 22957480 \text{ и } \tilde{C}_{42}^6 = C_{47}^6 = 10737573.$$

<u>Правильными должны быть следующие результаты:</u>

$$\tilde{C}_6^{48} = C_{53}^{48} = C_{53}^5 = \frac{53 \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2869685;$$

$$\tilde{C}_6^{42} = C_{47}^{42} = C_{47}^5 = \frac{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1533939.$$

Приведем правильное решение еще двух задач из этого же источника [18, с. 54, № 13, 14] на использование понятия числа сочетаний с повторениями.

<u>Задача 8.</u> «*Сколько решений имеет уравнение* $x + y + z = 20$ *в натуральных числах?*».

<u>Решение.</u> Применим стратегию организации данных при подсчете возможных вариантов комбинаций всех неизвестных, входящих в уравнение $x + y + z = 20$ в натуральных числах.

При подсчете количества решений учитывались все возможные перестановки значений неизвестных.

Таблица 5

Возможные варианты комбинаций неизвестных, входящих в уравнение

Комбинация чисел			Количество различных перестановок		Комбинация чисел			Количество различных перестановок
x	y	z			x	y	z	
1	2	17	6		2	3	15	6
1	3	16	6		2	4	14	6
1	4	15	6		2	5	13	6
1	5	14	6		2	6	12	6
1	6	13	6		2	7	11	6
1	7	12	6		2	8	10	6
1	8	11	6		3	4	13	6
1	9	10	6		3	5	12	6
1	1	18	3		3	6	11	6
2	2	16	3		3	7	10	6
3	3	14	3		3	8	9	6
4	4	12	3		4	5	11	6
5	5	10	3		4	6	10	6
6	6	8	3		4	7	9	6
7	7	6	3		5	6	9	6
8	8	4	3		5	7	8	6
9	9	2	3		итого			171

Составлено авторами

Общее количество решений уравнения $x + y + z = 20$ в натуральных числах составило **171**.

Из таблицы нетрудно заметить, что в вариантах возможных решений уравнения участвуют восемнадцать чисел. Одно из этих чисел первоначально включается в исследуемую тройку, поэтому при расчетах комбинаций с использованием понятия числа сочетаний с повторениями нужно исключить из рассмотрения одно из восемнадцати чисел и подсчитать

$$\tilde{C}_3^{17} = C_{19}^{17} = C_{19}^{2} = \frac{19 \cdot 18}{1 \cdot 2} = 171.$$

Результаты совпадают.

<u>Задача 9.</u> «*Сколько решений имеет уравнение* $x + y + z = 20$ *в целых неотрицательных числах?*».

<u>Решение.</u> Добавим к предыдущей таблице дополнительную табличку с нулем (табл. 6).

Таблица 6

Дополнительные варианты комбинаций неизвестных с нулем

Комбинация чисел			Количество различных перестановок
x	y	z	
0	1	19	6
0	2	18	6
0	3	17	6
0	4	16	6
0	5	15	6
0	6	14	6
0	7	13	6
0	8	12	6
0	9	11	6
0	10	10	6

0	0	20	6
Итого			**60**

Составлено авторами

В итоге общее количество решений уравнения в целых неотрицательных числах составит **171 + 60 = 231**.

Аналогично исключаем из рассмотрения одно число из двадцати одного и вычисляем общее количество решений уравнения $x+y+z=20$ в целых неотрицательных числах

$$\tilde{C}_3^{20}=C_{22}^{20}=C_{22}^{2}=\frac{22\cdot 21}{1\cdot 2}=231.$$

Результаты также совпадают.

Примечание. В тематическом тренажере ЕГЭ [18] ответы указаны неверные: $\tilde{C}_{17}^{3}=C_{19}^{3}=1140$; $\tilde{C}_{20}^{3}=C_{22}^{3}=1540$, и далеки от реальности $\left(\tilde{C}_3^{20}\neq\tilde{C}_{20}^{3}\right)$!

Заключение

Мы рассмотрели ряд задач, связанных с изучением элементов комбинаторики и теории вероятностей в современной школе. Отметим следующее.

1. Стоит подумать над расширением содержательной базы раздела «элементы комбинаторики». В частности, обратить внимание на логические принципы использования общих правил комбинаторики (правила суммы и правила произведения), не ограничиваясь комбинациями без повторяющихся элементов.

2. Нужно научить школьников понимать сущность комбинаторных и вероятностных задач на основе простых и интуитивно понятных им свойств и правил, не вдаваясь в тонкости строгих математических определений.

3. При решении вероятностных задач элементами множества являются элементарные случайные события. Нужно отметить тесную связь теории вероятностей с теорией множеств. Решение многих не простых вероятностных задач становится более ясным и понятным, если разбить рассматриваемое множество на классы — попарно непересекающиеся подмножества.

4. Требуется профессиональная, качественная корректировка теоретического и практического материала, предлагаемого современным школьникам. Это относится к отбору материала, к принятию обоснованного решения по содержанию, по его распределению по годам обучения, по базовой и углубленной составляющей.

5. Требуется пересмотр методических подходов к обучению теории вероятностей студентов математических факультетов педвузов, будущих учителей математики. Например, А.Н. Ветохин и Е.И. Деза предлагают два подхода: «Либо параллельно с классическим изложением демонстрировать студентам решение задач на основании элементарных, «школьных» соображений. Либо создавать дисциплину по выбору, посвященную обучению студентов методике преподавания теории вероятностей в школе. В идеале желательно использовать обе эти возможности» [11, с. 224].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ермаков В.П. Определение вероятности события. // Журнал элементарной математики. — 1884 — Т. 1, № 4, с. 7-11.

2. Ермаков В.П. Теория соединений с исключениями. // Журнал элементарной математики. — 1885 — Т. 2, № 1, с. 71–76.
3. Лаплас П.С. Опыт философии теории вероятностей. Популярное изложение основ теории вероятностей и ее приложений. Перевод А.И.В. под редакцией А.К. Власова. // М.: Типо-лит. т-ва И.Н. Кушнерев и К°, 1908. — 207 с.
4. Игнатьев Е.И. В царстве смекалки или арифметика для всех. Книга третья. — изд. 2-е. — Петроград, 1915. — 326 с.
5. Колмогоров А.Н. Введение в теорию вероятностей / А.Н. Колмогоров, И.Г. Журбенко, А.И. Прохоров /. М.: Наука, 1982. 160 с.
6. Варга Т. Математика 1. Блок-схемы, перфокарты, вероятности: (Математические игры и опыты). Пер. с нем. — М.: Педагогика, 1978. — 112 с.
7. Варга Т. Математика 2. Плоскость и пространство. Деревья и графы. Комбинаторика и вероятность: (Математические игры и опыты). Пер. с нем. — М.: Педагогика, 1978. — 112 с.
8. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями / Пер. с англ. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. — 112 с.
9. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 240 с.
10. Ветохин А.Н. О месте комбинаторики в математической подготовке школьников / А.Н. Ветохин, Е.И. Деза, Д.Л. Модель — DOI: 10.31862/1819-463X-2023-6-160-172 // Наука и школа. 2023. № 6. С. 160–172.
11. Ветохин А.Н. О месте теоретико-вероятностных задач в математической подготовке школьников / А.Н. Ветохин, Е.И. Деза // Наука и школа. 2023. № 2. С. 214–226. DOI: 10.31862/1819-463X-2023-2-214-226.
12. Михин М.Н. О некоторых вопросах преподавания школьникам теории вероятностей / М.Н. Михин, Т.Б. Белова // Образование от «А» до «Я». 2022. С. 402–406.
13. Евдокимова Г.С. Методические замечания к реализации стохастической линии в курсе математики средней школы / Г.С. Евдокимова, Г.Е. Сенькина // В сборнике: Современные проблемы науки и образования. 2021. № 2. С. 63.
14. Морозова А.В. Линия теории вероятности, комбинаторики и статистики в основном общем образовании // В сборнике: Современные проблемы математики, физики и физико-математического образования. Материалы XI Международной научно-практической конференции. Орехово-Зуево, 2021. С. 113-117.
15. Почекаева И.А. Опорные алгоритмы по решению вероятностных задач в средней школе // В сборнике: Шаг в науку. Материалы XI Региональной научно-практической конференции студентов и магистрантов ИФМИТО НГПУ. 2020. С. 100–102.
16. Трунтаева Т.И. Направления расширения и углубления знаний школьников по теории вероятностей и математической статистике / Т.И. Трунтаева, А.А. Арзуманян // В сборнике: Вестник Калужского университета. 2023. № 1(58). С. 60–67.

17. Таштемирова Н.Н. Методические аспекты преподавания стохастики в средней школе // В сборнике: Актуальные тренды в науке и образовании, сборник статей Международной научно-практической конференции в 2 частях. Пенза, 2024. С. 356–357.
18. Рязановский А.Р. ЕГЭ Тематический тренажер, Математика. Профильный уровень. Теория вероятностей и элементы статистики /А.Р. Рязановский, Д.Г. Мухин. — М.: Издательство «Экзамен», 2023. — 95 с. ISBN 978-5-37718-463-8.

Stepanenko Gennady Alekseevich
Stavropol State Pedagogical Institute, Zheleznovodsk, Russia
E-mail: stepang46@mail.ru
RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=737124

Ponomarenko Tatyana Antonovna
Stavropol State Pedagogical Institute, Zheleznovodsk, Russia
E-mail: tanyakmv2503@yandex.ru
RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=728409

Sytnikova Danuta Rishardovna
GBOU Secondary school No. 291 of Saint Petersburg, Saint Petersburg, Russia
E-mail: Danuta.sytnikova@mail.ru

Combinatorics and probability in the school mathematics course. Problem solving strategies

Abstract. The article is devoted to the problems of mathematical education in Russian schools. The authors note that currently probability theory is being transferred from the walls of higher and specialized educational institutions to all our secondary schools. The presentation of the elements of the doctrine of probability theory in general education schools does not require the introduction of so-called «higher» mathematics. Students can easily learn two rules of combinatorics (the sum rule and the product rule) and logically apply them to solving probabilistic problems without memorizing special formulas. Simple combinatorial methods can solve difficult problems with an entertaining formulation and unexpected answers. Interesting classical problems from «old» books are presented. This article also attempts to show a logical analogy between set theory and probability theory using the geometric concept of event probability and Euler-Venn diagrams. When solving problems, the main emphasis is placed on the materials of the OGE and the Unified State Exam, since they reflect the requirements for passing the state final certification. The incorrect solution of some combinatorial problems is noted in the collection «USE Thematic simulator, Mathematics. Profile level. Probability theory and elements of statistics» authors A.R. Ryazanovsky, D.G. Mukhin.

Keywords: combinatorics; probability of an event; mathematics; Euler-Venn diagrams; problem solving strategies; teaching methods; schoolchildren