Мир Науки
научный интернет-журнал
Выпуск 4 - 2014
(499) 755 50 99
http://mir-nauki.com

УДК 517.956

Хачев Мухадин Мухарбиевич
ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский Государственный аграрный университет им. В.М. Кокова»
Россия, г. Нальчик
Профессор
Доктор физико-математических наук
E-mail: khachev.mukhadin@yandex.ru

О некоторых модельных задач в теории уравнений смешанного типа

Аннотация. В работе приведены основные результаты отечественных и зарубежных авторов. Сформулированы модельные краевые задачи и результаты автора для уравнений смешанного типа в канонических областях.

Ключевые слова: уравнения в частных производных; уравнения смешанного типа; задача Дирихле; метод «abc»; метод интегральных преобразований; функции Бесселя.

Теоретической основой математического моделирования физических процессов в реальных средах является дифференциальные уравнения в частных производных. При построении моделей реальных процессов фундаментальное значение имеет корректность поставленной задачи. Из множества разнообразных модельных задач особое место занимает краевые задачи Дирихле. Эти задачи возникают в теории тонких оболочек, в теории самолетостроения, в теории трансзвуковой газовой динамики и гидродинамики.

Ярким примером некорректно поставленных задач в теории уравнений с частными производными гиперболического типа служат краевые задачи с данными на всей границе области (задача Дирихле). Первые результаты по исследованию краевых задач с данными на всей границе для гиперболических уравнений были получены в работах зарубежных математиков Hadamard J. , Huber A. и Mangeron D. в 30-х годах.

В работе [1] исследована задача Дирихле для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

в прямоугольной области

$$R = \{(t,x) : 0 \le t \le T; 0 \le x \le S\}.$$

В работе впервые было установлено, что корректность задачи Дирихле существенно зависит от отношения длин сторон прямоугольника которое должно быть некоторым иррациональным числом. Начиная, с 1940 года по1973 год группа зарубежных и советских математиков были исследованы для уравнения гиперболического типа на плоскости и в пространстве различными методами модельные задачи с данными на всей границе и получены интересные результаты.

Постановка и исследования задачи Дирихле существенно усложняется в случае вырождения типа и порядка в дифференциальных уравнениях в частных производных.

Впервые на важность уравнений смешанного типа обратил внимание С.А. Чаплыгин в 1902 году в работе « О газовых струях».

Начало исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в работах Ф. Трикоми и С. Геллерстедтом, где были впервые поставлены и исследованы краевые задачи для модельного уравнения смешанного типа на плоскости. Эти краевые задачи в настоящее время носят название задача Трикоми, задача Геллерстедта. Интерес к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа резко повысился после известных работ Ф.И. Франкля, в которых впервые обращено внимание на то, что многие задачи трансзвуковой газовой динамики и гидродинамики сводятся к задаче Дирихле. Так, если рассматривать задачу перехода через звуковой барьер установившихся двумерных безвихревых течений идеального газа в соплах когда сверхзвуковые зоны примыкают к стенкам сопла вблизи минимального сечения, то она сводится для линейных уравнений с частными производными второго порядка смешанного типа в упрощенной постановке в задаче Дирихле.

На некорректность задачи Дирихле для уравнения u_{xx}+sgnyu$_{yy}$=0 в смешанной области, гиперболическая часть $\sum$ границы которой лежат в характеристическом треугольнике $0 \le x+y < x-y \le 1$, впервые обратил внимание А.В. Бицадзе [2]. Причем некорректность задачи Дирихле не зависит от малости меры области, заключенный между $\sum$ и y=0. Результат А.В. Бицадзе с необходимостью поставил вопрос поиска смешанных областей, для которых задача Дирихле является корректно поставлено. По данной проблеме интересные результаты получены отечественными математиками Шабат Б.В., Вахания Н.Н. и Нахушев А.М.

А.М. Нахушевым [3] установлено, что задача Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в области $\Omega=\Omega_1\cup J\cup\Omega_2$, где Ω_1- ограниченная односвязная область верхней полуплоскости y>0 с кусочно-гладкой границей, содержащей интервал J:0<x<1 прямой y=0, а Ω_2 = J× J – квадрат 0<x<1, -1<y<0, всегда разрешима и притом единственным образом. Там же для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений в цилиндрической области доказана единственность решения задачи Дирихле.

В последние годы появилось ряд работ Хачева М.М., посвященные вопросу поиска смешанных областей, для которых задача Дирихле является корректно поставленной. Основные результаты автора отражены в монографии [4]. Для удобства ниже приведены постановки модельных краевых задач и полученные результаты автора.

Модельная задача 1.Рассматривается обобщенное уравнение Лаврентьева-Бицадзе

$$sgn\, y[a(x)u_{xx}+b(x)u_x+c(x)u]+u_{yy}=0 \qquad (1)$$

в области $D=\{(x,y):0<x<1,-\alpha<y<\beta\}$, где $\alpha,\beta\equiv\mathrm{const}>0$.

Предполагается, что коэффициенты уравнения (1) непрерывны на сегменте $\bar{J}=\{x:0\le x\le 1\}$, причем $0<\mathrm{const}\equiv a_0<a(x)\in C^1(\bar{J}), c(x)\le c_0\equiv\mathrm{const}<0$.

Пусть $D^+=D\cap(y>0), D^-=D\cap(y<0)$, а AB_0 и BA_0 – характеристика уравнения (1), проходящие через вершины прямоугольника D.

Изучена задача Дирихле: *найти решение* $u\equiv u(x,y)$ *уравнения* (1) *в области* D *со следующими свойствами: 1)* $u\in C(\bar{D})$; *2)* $u\in C^1(D)\cap C^2(D^+\cup D^-)$ *кроме, быть может, характеристик* AB_0 *и* BA_0 *уравнения* (1)*; 3)* $u_y\in L_2(0,1)$ *равномерно по* x *при всех* $y\in(-\alpha,\beta)$ *и существует предел* u_y *при* $y\to-\alpha$ *в* $L_2(0,1)$*; 4)* u *удовлетворяет краевым условиям:* $u(0,y)=0, u(1,y)=0, -\alpha\le y\le\beta; u(x,\beta)=\varphi(x), u(x,-\alpha)=\psi(x)$,

$$0\le x\le 1.$$

Справедливы

Теорема 1. *Задача Дирихле имеет не более одного решения тогда и только тогда, когда для всех* $m\in\mathbb{N}$ *имеет место неравенство*

$$sh\left(\beta\sqrt{\lambda_m}\right)\cdot\cos(\alpha\sqrt{\lambda_m})+ch\left(\beta\sqrt{\lambda_m}\right)\cdot\sin(\alpha\sqrt{\lambda_m})\neq 0, \qquad (2)$$

где λ_m *- собственные значение задачи Штурма - Лиувилля:*

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dX}{dx}-q(x)X+\lambda\rho(x)X=0,\qquad 0<x<1,\right]\\ \qquad\qquad X(0)=0,\qquad X(1)=0.\end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть: 1) для всех* $m\in N$ *и заданных α,β выполнено неравенство* (2)*; 2)* $a(x),b(x),c(x),\varphi(x),\psi(x)\in C^4(J)$*; 3)* $\varphi^n(0)=\psi^n(0)=0, n=0,1,2,3$*; 4) функция* $\tau(x)=\lim\limits_{y\to+0}u(x,y)$ *разложима в абсолютно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям* $X_m(x), m\in\mathbb{N}$. *Тогда существует единственное решение задачи Дирихле.*

Модельная задача 2.В области $D=\{(x,y):0<x<1,-\alpha<y<\beta\}$ для уравнения

$$sngy|\boldsymbol{y}|^m\boldsymbol{u_{xx}}+\boldsymbol{u_{xx}}-\boldsymbol{\lambda^2 sngy}|\boldsymbol{y}|^m\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}, \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{m} \equiv \mathbf{const} > \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$, изучена задача Дирихле: *найти решение* $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *уравнения* (3) *в области* $\boldsymbol{D}$, *обладающее следующими свойствами: 1)* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}(\overline{\boldsymbol{D}})$; *2)* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}^{1}(\boldsymbol{D}) \cap \boldsymbol{C}^{2}(\boldsymbol{D}^{+} \cup \boldsymbol{D}^{-})$ *за исключением, быть может, характеристик уравнения* (3); *3)* $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{L}_{2}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ *равномерно* $\boldsymbol{x}$ *при всех* $\boldsymbol{y} \in (-\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ *и существует предел* $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{y}}$ *при* $\boldsymbol{y} \to -\boldsymbol{\alpha}$ *в* $\boldsymbol{L}_{2}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$; *4) и удовлетворяет краевым условиям:* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\psi}_{1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\psi}_{2}(\boldsymbol{x}), \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}$; $\boldsymbol{u}(\mathbf{0}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{u}(\mathbf{1}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}, -\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{\beta}$.

Справедливы

Теорема 1. *Задача Дирихле для уравнения* (3) *в области* $\boldsymbol{D}$ *имеет не более одного решения тогда и только тогда, когда для всех* $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство*

$$\boldsymbol{J}_{-\frac{1}{2+m}}(\boldsymbol{\mu}_{n}\boldsymbol{\alpha}_{1}) + \boldsymbol{J}_{\frac{1}{2+m}}(\boldsymbol{\mu}_{n}\boldsymbol{\alpha}_{1}) \cdot \boldsymbol{I}_{-\frac{1}{2+m}}(\boldsymbol{\mu}_{n}\boldsymbol{\beta}_{1}) / \boldsymbol{I}_{\frac{1}{2+m}}(\boldsymbol{\mu}_{n}\boldsymbol{\beta}_{1}) \neq \mathbf{0},$$

где $(\mathbf{2} + \boldsymbol{m})\boldsymbol{\alpha}_{1} = \mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}^{\frac{2+m}{2}}, (\mathbf{2} + \boldsymbol{m})\boldsymbol{\beta}_{1} = \mathbf{2}\boldsymbol{\beta}^{\frac{2+m}{2}}, \boldsymbol{\mu}_{n} = \sqrt{\boldsymbol{\lambda}^{2} + \boldsymbol{\pi}^{2}\boldsymbol{n}^{2}}$.

Теорема 2. *Пусть: 1) для всех* $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство* $\inf_{n} \sqrt{\boldsymbol{n}}|\boldsymbol{E}_{n}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\beta}_{1})| > \mathbf{0}$; *2) функции* $\boldsymbol{\psi}_{k}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\psi}_{k}'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\psi}_{k}''(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{C}([\mathbf{0}, \mathbf{1}])$, а $\boldsymbol{\psi}_{k}'''(\boldsymbol{x})$ *– кусочно-непрерывные функции на отрезке* $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ *, причем* $\boldsymbol{\psi}_{k}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\psi}_{k}'(\mathbf{1})$, $\boldsymbol{\psi}_{k}''(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\psi}_{k}''(\mathbf{1}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{k} = \mathbf{1}, \mathbf{2}$. *Тогда существует единственное решение задачи Дирихле для уравнения* (3) *в области* $\boldsymbol{D}$.

Модельная задача 3.Рассматривается уравнение

$$\boldsymbol{u}_{xx} + \boldsymbol{sgny}\left[|\boldsymbol{y}|^{m}\boldsymbol{u}_{yy} + \boldsymbol{a}|\boldsymbol{y}|^{m-1}\boldsymbol{u}_{y}\boldsymbol{b}|\boldsymbol{y}|^{m-2}\boldsymbol{u}\right] \tag{4}$$

в области $\boldsymbol{D} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \colon \mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \mathbf{1}, -\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{y} < \boldsymbol{\beta}\}$, где $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \equiv \mathbf{const} > \mathbf{0}, \mathbf{0} < \boldsymbol{m} < \mathbf{2}$ и $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ – постоянные, подчиненные условиям: 1) $\mathbf{4}\boldsymbol{b} < (\boldsymbol{a} - \mathbf{1})^{2} < \mathbf{4}\boldsymbol{b} + (\mathbf{2} - \boldsymbol{m})^{2}$; 2) $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ при $\boldsymbol{a} < \mathbf{1}, \mathbf{1} < \boldsymbol{a} < \mathbf{3} - \boldsymbol{m}$ и при $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}, \boldsymbol{m} < \mathbf{1}$; 3) $\boldsymbol{b} \leq \mathbf{0}$ при $\boldsymbol{a} \geq \mathbf{3} - \boldsymbol{m}$.

Пусть $\boldsymbol{D}^{+} = \boldsymbol{D} \cap (\boldsymbol{y} > \mathbf{0}), \boldsymbol{D}^{-} = \boldsymbol{D} \cap (\boldsymbol{y} < \mathbf{0})$ эллиптическая и гиперболическая части области $\boldsymbol{D}$ и $\mathbf{2}\boldsymbol{p}_{1} = \mathbf{1} - \boldsymbol{a} + \sqrt{(\boldsymbol{a} - \mathbf{1})^{2} - \mathbf{4}\boldsymbol{b}}$, $\mathbf{2}\boldsymbol{p}_{1} = \mathbf{1} - \boldsymbol{a} - \sqrt{(\boldsymbol{a} - \mathbf{1})^{2} - \mathbf{4}\boldsymbol{b}}$.

Назовем регулярным решения уравнения (4) функцию $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, которая непрерывна в $\overline{\boldsymbol{D}}$ при $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$, дважды дифференцируемая в $\boldsymbol{D}$ при $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ и вне характеристик в $\boldsymbol{D}^{-}$, и удовлетворяет в $\boldsymbol{D}^{+}$ и $\boldsymbol{D}^{-}$ уравнению (4).

Изучена задача Дирихле: *найти регулярное решение уравнения* (4), *для которого* $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{L}_{2}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ *равномерно по* $\boldsymbol{x}$ *при* $-\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{y} < \boldsymbol{\beta}$ *и существует предел* $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{y}}$ *при* $\boldsymbol{y} \to -\boldsymbol{\alpha}$ *в* $\boldsymbol{L}_{2}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, *удовлетворяющее краевым условиям:* $\boldsymbol{u}(\mathbf{0}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{u}(\mathbf{1}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}, -\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{\beta}$; $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\varphi}_{1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\varphi}_{2}(\boldsymbol{x}), \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}$ *и выполняются условия сопряжения:* $\lim\limits_{y \to +0} \boldsymbol{y}^{-p_{2}}\boldsymbol{u} = \lim\limits_{y \to -0} (-\boldsymbol{y})^{-p_{2}}\boldsymbol{u}, \lim\limits_{y \to +0} \left[\boldsymbol{y}^{1-p_{1}}\boldsymbol{u}_{y} - \boldsymbol{p}_{2}\boldsymbol{y}^{-p_{1}}\boldsymbol{u}\right] = \lim\limits_{y \to -0} \left[(-\boldsymbol{y})^{1-p_{1}}\boldsymbol{u}_{y} + \boldsymbol{p}_{2}\boldsymbol{y}^{-p_{1}}\boldsymbol{u}\right]$.

Имеет место теоремы

Теорема 1: *Пусть постоянные величины* $\boldsymbol{\alpha}$ *и* $\boldsymbol{\beta}$ *таковы, что для всех* $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство* $\boldsymbol{E}_{n}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\beta}_{1}) = \boldsymbol{J}_{-p}(\boldsymbol{\pi n \alpha}_{1}) + \boldsymbol{J}_{p}(\boldsymbol{\pi n \alpha}_{1})\, \boldsymbol{I}_{-p}(\boldsymbol{\pi n \beta}_{1}) / \boldsymbol{I}_{p}(\boldsymbol{\pi n \beta}_{1}) \neq \mathbf{0}$, *где* $(\mathbf{2} - \boldsymbol{m})\boldsymbol{\alpha}_{1} = \mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}^{\frac{2-m}{2}}, (\mathbf{2} - \boldsymbol{m})\boldsymbol{\beta}_{1} = \mathbf{2}\boldsymbol{\beta}^{\frac{2-m}{2}}, (\mathbf{2} - \boldsymbol{m})\boldsymbol{p} = \sqrt{(\boldsymbol{a} - \mathbf{1})^{2} - \mathbf{4}\boldsymbol{b}^{2}}$. *Тогда задача Дирихле для уравнения* (4) *в области* $\boldsymbol{D}$ *имеет не более одного решения.*

Теорема 2. *Пусть: 1) функции* $\varphi_k(x), \varphi'_k(x), \varphi''_k(x) \in C([0,1])$, а $\varphi'''_k(x)$ *-кусочно-непрерывные функции на отрезке* $[0,1]$, *причем* $\varphi_k(0) = \varphi'_k(1)$, $\varphi''_k(0) = \varphi''_k(1) = 0, k = 1,2$; *2) для всех* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство* $\inf\limits_n \sqrt{n}|E_n(\alpha_1, \beta_1)| > 0$.

Тогда существует единственное решение задачи Дирихле.

Теорема 3. *Пусть сходятся числовые ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^s\,|\varphi_{1n}|, \sum_{n=1}^{\infty} n^s\,|\varphi_{2n}|, s = 0,1,2,3.$$

Тогда: 1) ряды $y^{-p_2}u^{\pm}, y^{-p_2}u^{\pm}_x, y^{1-p_2}u^{\pm}_y$ *сходятся абсолютно и равномерно в замкнутой области* $\overline{D^{\pm}}$; *2) ряды* $y^{-p_2}u^{\pm}_{xx}, y^{-p_2}u^{\pm}_{yy}$ *сходятся абсолютно и равномерно в области* $D^{\pm}$.

Модельная задача 4. В области $D = \{(x,y): 0 < x < 1, -\alpha < y < 0\}$, рассматривается уравнение

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2(-y)^m u = 0, \qquad (5)$$

где $\alpha, m \equiv \mathrm{const} > 0, \lambda \in \mathbb{R}$. Область D - прямоугольник, обладающий тем свойством, что характеристики уравнения (5)

$$AB_0: x = \frac{2}{2+m}(-y)^{\frac{2+m}{2}}, BA_0: 1 - x = \frac{2}{2+m}(-y)^{\frac{2+m}{2}}$$

проходят через его вершины. Обозначим через D_1 криволинейный треугольник ABC, то есть часть области D, ограниченный отрезком AB и характеристическими сегментами AC и BC, где C – точка пересечения характеристик AB_0 и BA_0; а D_2, D_3 и D_4 - криволинейные треугольники BCB_0, B_0CA_0 и A_0CA соответственно.

Исследована задача Дирихле: *найти непрерывую в замкнутой области* $\overline{D}$ *функцию* $u \equiv u(x,y;\lambda)$ *со следующими свойствами: 1) и непрерывно дифференцируема всюду в* $\overline{D}$ *за исключением, быть может, характеристик* AB_0 *и* BA_0; *2)* $u_y \in L_2(0,1)$ *равномерно по x при всех* $-\alpha < y < 0$ *и существует предел* u_y *в* $L_2(0,1)$ *при* $y \to -\alpha$; *3) и регулярное в* $D_i(i = 1,2,3,4)$ *решение уравнения* (5), *принимающие краевые условия:*

$$u(x,0;\lambda) = \tau(x,\lambda), \qquad u(x,-\alpha;\lambda) = \varphi(x,\lambda), \qquad 0 \le x \le 1,$$
$$u(0,y;\lambda) = 0, \qquad u(1,y;\lambda) = 0, \qquad -\alpha \le y \le 0, \qquad |\lambda| < \infty.$$

Имеет место

Теорема. *Для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и любого фиксированного* $\lambda \in \mathbb{R}$ *задача Дирихле имеет не более одного решения.*

Модельная задача 5.Рассматривается уравнение

$$sgny|y|^m u_{xx} + sgnx|x|^m u_{yy} - \lambda^2 sgnxy|xy|^m u = 0, (\lambda \in \mathbb{R}, m \ge 0) \qquad (6)$$

в области $D = \{(x,y): 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $\alpha, \beta, l > 0$.

Пусть $D^+ = D \cap (y > 0), D^- = D \cap (y < 0)$ - эллиптическая и гиперболическая части области D.

Изучена задача Дирихле: *найти решение* $u \equiv u(x,y)$ *уравнения* (6) *в области* D *со следующими свойствами: 1)* $u \in C(\overline{D})$; *2)* $u \in C^1(D) \cap$

$= \mathbf{0}, -\alpha \le y \le \beta; u(x,\beta) = \varphi_1(x), u(x,-\alpha) = \varphi_2(x), 0 \le x \le l.$

Справедлива

Теорема. *Пусть: 1) постоянные* α, β, l *таковы, что для всех* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство* $E_n(\alpha_1, \beta_1) = J_p(\alpha_1, \mu_n) I_{-p}(\beta_1, \mu_n) + J_{-p}(\alpha_1, \mu_n) I_p(\beta_1, \mu_n)$

$\ne 0$ *,где* $\alpha_1 = 2p\alpha^{1/2p}, \beta_1 = 2p\beta^{1/2p}, \mu_n^2 = \lambda^2 + k_n^2, k_n = j_{p,n}/(2pl^{1/2p}), j_{p,n}$ – *корни функции Бесселя первого рода порядка* $p = 1/(2+m)$; *2) функции* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *удовлетворяют условиям теоремы Гобсона; 3) для всех* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство* $\inf_n \sqrt{\mu_n}|E_n(\alpha_1, \beta_1)| > 0$. *Тогда существует единственное решение задачи Дирихле для уравнения (6) в области* D.

Модельная задача 6.Рассматривается уравнение Геллерстедта

$$sgny|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad m \equiv \text{const} > 0 \qquad (7)$$

в смешанной области $D = \{(x,y): 0 < x < 1, -\alpha < y < +\infty\}, \alpha > 0$.

Примем следующие обозначения: $D_h = \{(x,y): 0 < x < 1, -\alpha < y < h\}$

$D_h^+ = D_h \cap (y > 0), D_h^- = D_h \cap (y < 0)$, где $h \equiv \text{const} > 0$; $W(A)$ – множество функций $v(x,y)$, непрерывных в $\overline{D_h}$ и принадлежащих к классу

$C^2(D_h^+) \cap C^2(D_h^-) \cap C^1(D_h)$ и таких, что разность $u_1(x,y) - u_2(x,y) \equiv v(x,y)$ двух его любых элементов удовлетворяют условиям:

1) $\lim_{h\to+\infty} \int_0^1 v(x,y) v_y(x,h) dx = 0$; 2) $\lim_{\delta\to-\alpha} \int_0^1 v(x,\delta) v_y(x,\delta) dx = 0$.

Под решением уравнения (7) в области D будем понимать функцию $u = u(x,y)$ со следующими свойствами: 1) $u \in W(D^\pm)$;

2) $\int_0^1 u(x,0) u_y(x,0) dx < \infty$; $\int_{D^+} (y^m u_x^2 + u_y^2)\, dxdy < \infty$; $\int_{D^-} [u_y^2 - (-y)^m u_x^2]\, dxdy < \infty$;

Задача Дирихле: *найти решение* $u(x,y)$ *уравнения* (7) *в области* D, *удовлетворяющее краевым условиям:* $u(0,y) = \varphi(y), u(1,y) = \psi(y), -\alpha \le y < +\infty$; $u(x,-\alpha) = f(x)$; $0 \le x \le 1$, $\lim_{y\to+\infty} u = 0$ *равномерно по* $x \in [0,1]$, *где* $\varphi(y), \psi(y) \in C((0,\infty]), f(x) \in C((0,1]))$, $\lim_{y\to+\infty} \varphi(y) = 0$, $\lim_{y\to+\infty} \psi(y) = 0$, $f(0) = \varphi(-\alpha) = 0$, $f(1) = \psi(-\alpha) = 0$.

Имеет место

Теорема. *Задача Дирихле для уравнения* (7) *в области* D *имеет не более одного решения.*

Рассматривается уравнение Геллерстедта (7) в области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, где D^+ - есть полуплоскость $y > 0$, а $D^- = D \cap (y < 0)$ – прямоугольник, обладающий тем свойством, что характеристики уравнения (7) проходят через его вершины, $J = (0,1)$.

Изучена задача Дирихле: *найти функцию* $u \equiv u(x,y)$ *со следующими свойствами: 1)* $u \in C(\overline{D})$; *2)* $u \in C^1(D \cup J_1 \cup J_2) \cap C^2(D^+) \cap C^2(D^-)$ *кроме, быть может, характеристик уравнения* (7); *3)* u *удовлетворяет уравнению* (7) *в* $D^+ \cup D^-$ *и краевым условиям:*

$$u(x,0) = \tau_i(x), \qquad \forall x \in J_i, \qquad i = 1,2;$$

$$\lim_{\rho\to\infty} u(x,y), \qquad \rho^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(2+m)^2} y^{m+2}, \qquad \forall (x,y) \in D^+;$$

$$u(0,y)=\varphi_1(y), \qquad u(0,y)=\varphi_1(y)$$
$$u(x,-\alpha)=f(x), \qquad 0\le x\le 1,$$
$$где\ J_1=(-\infty,0), J_2=(1,+\infty), \alpha=\left(\frac{2+m}{2}\right)^{2/2+m}.$$

Справедлива **теорема:** *в области D не может существовать более одного решения задачи Дирихле.*

Модельная задача 7.Рассматривается уравнение Трикоми:

$$sgny|y|u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{8}$$

в области $D=\{(x,y): -\infty<x<+\infty, -\alpha<y<\beta\}, \alpha,\beta>0.$

Введем обозначения:

$$D_\delta=\{(x,y): -\delta<x<\delta, -\alpha<y<\beta\}, D_\delta^{\pm}=D_\delta\cap(\pm y>0),$$

где $\delta\equiv \mathbf{const}>0$; $\mathrm{W(B)}$ есть множество функций $u(x,y)$, непрерывных в $\overline{D_\delta}$ и принадлежит к классу $C^2(D_\delta^+)\cap C^2(D_\delta^-)\cap C^1(D_\delta)$, удовлетворяющее условиям: 1) $\lim\limits_{\delta\to\pm\infty} u(\delta,y)=0$ равномерно по $y\in[-\alpha,\beta]$; 2) $\lim\limits_{\delta\to\pm\infty} u_x(\delta,y)=0$, $\lim\limits_{\delta\to\pm\infty} u_y(\delta,y)=0$ равномерно по $y\in[-\alpha,\beta]$;

3) $\lim\limits_{\delta\to\pm\infty}\int_{-\alpha}^{\beta}u(\delta,y)u_x(\delta,y)dy=0.$

Под решением уравнения (8) в области D при $y\neq 0$ будем понимать функцию $u\equiv u(x,y)$ со следующими свойствами: 1) $u\in W(B)$; 2) $\int_{-\delta}^{\delta}u(x,0)u_y(x,0)dx<\infty.$

Для уравнения (9) изучена задача Дирихле: *найти решение $u(x,y)$ уравнения* (9) *в области D при $y\neq 0$, удовлетворяющее краевым условиям: $u(x,\beta)=\varphi_1(x), u(x,-\alpha)=\varphi_2(x), -\infty<x<+\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}u(x,y)=0$ равномерно по $y\in[-\alpha,\beta]$, где $\varphi_i(x)\in(-\infty,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varphi_i(x)=0, j=1,2.$*

Имеет место теоремы

Теорема 1. *Пусть: 1) $u\in W(B)$; 2) $u_x,u_y,u_{xx},u_{yy},u_{xy}\in C\left(\overline{D}^+\cup\overline{D}^-\right)$.*

Тогда задача Дирихле имеет только одно решение.

Теорема 2. *Пусть: 1) $u\in W(B)$; 2) $u_x,u_y,u_{xx},u_{yy},u_{xy}\in C\left(\overline{D}^+\cup\overline{D}^-\right)$; 3)$\varphi_1^{(s)}(x),\varphi_2^{(s)}(x)\in C(-\infty,+\infty)$; $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi_1^{(s)}(x)\right|dx<\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi_2^{(s)}(x)\right|dx<\infty$, $s=0,1,2,3,4$; 4) $\int_{-\infty}^{+\infty}|x\varphi_1(x)|dx<\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty}|x\varphi_2(x)|dx<\infty$; 5) числа α и β таковы, что для любых фиксированных значений λ имеет место неравенство*

$$J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\lambda\alpha\sqrt{\alpha}\right)I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\lambda\beta\sqrt{\beta}\right)+J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\lambda\alpha\sqrt{\alpha}\right)I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\lambda\beta\sqrt{\beta}\right)\neq 0.$$

Тогда решение $u(x,y)$ задачи Дирихле для уравнения Трикоми (8) *в области D существует, единственно и представимо в виде*

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}V(y,\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda,$$

где $V(y,\lambda)=V^{+}(y,\lambda)$ *при* $y>0$; $V(y,\lambda)=V^{-}(y,\lambda)$ *при* $y<0$;

$$V^{+}(y,\lambda)=\frac{\sqrt{y}I_{\frac{1}{3}}(\overline{y})J_{-\frac{1}{3}}(\overline{\alpha})+\sqrt{y}I_{-\frac{1}{3}}(\overline{y})J_{\frac{1}{3}}(\overline{\alpha})}{\sqrt{\beta}I_{\frac{1}{3}}(\overline{\beta})J_{-\frac{1}{3}}(\overline{\alpha})+\sqrt{\beta}I_{-\frac{1}{3}}(\overline{\beta})J_{\frac{1}{3}}(\overline{\alpha})}\cdot\varphi_1(\lambda)+$$

$$+\frac{\sqrt{y}I_{\frac{1}{3}}(\overline{y})I_{-\frac{1}{3}}(\overline{\beta})+\sqrt{y}I_{-\frac{1}{3}}(\overline{\beta})I_{\frac{1}{3}}(\overline{\alpha})}{\sqrt{\alpha}I_{\frac{1}{3}}(\overline{\beta})J_{-\frac{1}{3}}(\overline{\alpha})+\sqrt{\alpha}I_{-\frac{1}{3}}(\overline{\beta})J_{\frac{1}{3}}(\overline{\alpha})}\cdot\varphi_2(\lambda),$$

$$V^{-}(y,\lambda)=\frac{\sqrt{-y}J_{-\frac{1}{3}}(y_1)J_{\frac{1}{3}}(\overline{\alpha})-\sqrt{-y}J_{-\frac{1}{3}}(y_1)J_{\frac{1}{3}}(\overline{\alpha})}{\sqrt{\beta}J_{-\frac{1}{3}}(\overline{\alpha})I_{\frac{1}{3}}(\overline{\beta})+\sqrt{\beta}J_{\frac{1}{3}}(\overline{\alpha})I_{-\frac{1}{3}}(\overline{\beta})}\cdot\varphi_1(\lambda)+$$

$$+\frac{\sqrt{-y}J_{-\frac{1}{3}}(y_1)I_{\frac{1}{3}}(\overline{\beta})+\sqrt{-y}J_{\frac{1}{3}}(y_1)I_{-\frac{1}{3}}(\overline{\beta})}{\sqrt{\alpha}J_{-\frac{1}{3}}(\overline{\alpha})I_{\frac{1}{3}}(\overline{\beta})+\sqrt{\alpha}I_{-\frac{1}{3}}(\overline{\beta})J_{\frac{1}{3}}(\overline{\alpha})}\cdot\varphi_2(\lambda),$$

$$\overline{\alpha}=\frac{2}{3}\lambda\alpha\sqrt{\alpha},\qquad \overline{\beta}=\frac{2}{3}\lambda\beta\sqrt{\beta},\qquad \overline{y}=\frac{2}{3}\lambda y\sqrt{y},\qquad y_1=\frac{2}{3}\lambda(-y)\sqrt{-y}.$$

Модельная задача 8.В бесконечной призматической области $\Omega=\{(x,y,z):0<x<1,-\alpha<y<\beta,-\infty<z<+\infty\}$ рассматривается уравнение

$$sgny|y|^m(V_{xx}+V_{zz})+V_{yy}=0, \tag{9}$$

где $\alpha,\beta,m\equiv\mathrm{const}>0$.

Обозначим через $\Omega^{+}=\Omega\cap(y>0),\Omega^{-}=\Omega\cap(y<0)$.

Для уравнения (10) изучена задача Дирихле: *найти решение* $V\equiv V(x,y,z)$ *уравнения* (9) *в области* Ω *со следующими свойствами: 1)* $V\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^2(\Omega^{+}\cap\Omega^{-})$; *2) V удовлетворяет краевым условиям:* $V(x,\beta,z)=\Psi_1(x,z),V(x,-\alpha,z)=\Psi_2(x,z)$, $0\le x\le 1,-\infty<z<+\infty$, $V(0,y,z)=0$, $V(1,y,z)=0$, $-\alpha\le y\le\beta$, $-\infty<z<+\infty$, $\lim\limits_{z\to\pm\infty}V=0$ *равномерно относительно* $(x,y)\in\overline{\Omega}\cap\{z=0\}$.

Доказывается, что методом интегрального преобразования Фурье задача Дирихле для уравнения (9) эквивалентно редуцируется к плоской задаче Дирихле для уравнения

$$sgny|y|^m u_{xx}+u_{yy}-\lambda^2 sgny|y|^m u=0 \tag{10}$$

в области $D=\{(x,y):0<x<1,-\alpha<y<\beta\}$, причем $D^{+}=D\cap(y>0)$,

$$D^{-}=D\cap(y<0).$$

Задача Дирихле. *Найти решение* $u\equiv u(x,y;\lambda)$ *уравнения* (10) *в области* D, *обладающее следующими свойствами: 1)* $u\in C(\overline{D})$; *2)* $u\in C^1(D)\cap C^2(D^{+}\cap D^{-})$ *за исключением, быть может, характеристик уравнения* (10); *3)* $u_y\in L_2(0,1)$ *равномерно по x при* $y\in(-\alpha,\beta)$ *и существует предел* u_y *при* $y\to-\alpha$ *в* $L_2(0,1)$; *4) и удовлетворяет краевым условиям:*

$\boldsymbol{u(x,\beta,\lambda)=\psi_1(x,\lambda)}$, $\boldsymbol{u(x,-\alpha,\lambda)=\psi_2(x,\lambda)}$, $\boldsymbol{0\le x\le 1}$, $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{R}}$; $\boldsymbol{u(0,y,\lambda)=u(1,y,\lambda)=0}$, $\boldsymbol{-\alpha\le y\le\beta}$, $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{R}}$, *где* $\boldsymbol{\psi_k(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_k(x,z)\,e^{i\lambda z}}$, $\boldsymbol{k=1,2}$; $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{R}}$.

Имеет место теоремы

Теорема 1. *Задача Дирихле для уравнения* (10) *в области* $\boldsymbol{D}$ *имеет не более одного решения тогда и только тогда, когда для всех* $\boldsymbol{n\in\mathbb{N}}$, $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{R}}$ *и заданных постоянных* $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ *имеет место неравенство*

$$E_n(\alpha_1,\beta_1)\equiv J_{\frac{1}{2+m}}(\alpha_1\mu_n(\lambda))I_{-\frac{1}{2+m}}(\beta_1\mu_n(\lambda))+ \\ +J_{-\frac{1}{2+m}}(\alpha_1\mu_n(\lambda))I_{\frac{1}{2+m}}(\beta_1\mu_n(\lambda))\neq 0, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{(2+m)\alpha_1=2\alpha^{\frac{2+m}{2}}}$, $\boldsymbol{(2+m)\beta_1=2\beta^{\frac{2+m}{2}}}$, $\boldsymbol{\mu_n=\sqrt{\lambda^2+\pi^2n^2}}$.

Теорема 2. *Пусть: 1) для всех* $\boldsymbol{n\in\mathbb{N}}$, $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{R}}$ *и постоянных величин* $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ *имеет место неравенство* (11)*; 2) функции* $\boldsymbol{\psi_k(x,\lambda)}$, $\boldsymbol{\psi_k'(x,\lambda)}$, $\boldsymbol{\psi_k''(x,\lambda)\in C([0,1])}$, *а* $\boldsymbol{\psi_k'''(x,\lambda)}$ *– кусочно-непрерывные функции на отрезке* $[\boldsymbol{0,1}]$, *причем* $\boldsymbol{\psi_k(0,\lambda)=\psi_k(1,\lambda)}$, $\boldsymbol{\psi_k''(0,\lambda)=\psi_k''(1,\lambda)=0}$, $\boldsymbol{k=1,2}$; $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{R}}$; *3) для заданных постоянных* $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ *существует такое* $\boldsymbol{n_0(\beta)>0}$, *что при* $\boldsymbol{n>n_0(\beta)}$ *имеет место оценка* $\boldsymbol{|E_n(\alpha_1,\beta_1)|>A(\alpha_1,\beta_1)/\sqrt{\mu_n}}$. *Тогда существует единственное решение задачи Дирихле для уравнения* (10) *в области* $\boldsymbol{D}$.

Теорема 3: *пусть сходятся числовые ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^s\,|\psi_{1n}(\lambda)|,\qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^s\,|\psi_{2n}(\lambda)|,\qquad s=0,1,2,3;\ \ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Тогда: 1) ряды $\boldsymbol{u^{\pm},u_x^{\pm},u_y^{\pm}}$ *сходятся абсолютно и равномерно в замкнутой области* $\boldsymbol{\overline{D^{\pm}}}$*; 2) ряды* $\boldsymbol{u_{xx}^{\pm},u_{yy}^{\pm}}$ *сходятся абсолютно и равномерно в замкнутой области* $\boldsymbol{D^{\pm}}$.

Модельная задача 9.В области $\boldsymbol{\Omega=\{(x,y,z):0<x<p,-\alpha<y<\beta,0<z<q\}}$

$$u_{xx}+u_{zz}+sgny u_{yy}=0 \tag{12}$$

где $\boldsymbol{p,\alpha,\beta,q\equiv \mathrm{const}>0}$. Пусть $\boldsymbol{\Omega^+=\Omega\cap(y>0)}$, $\boldsymbol{\Omega^-=\Omega\cap(y<0)}$,

$\boldsymbol{J=\{(x,y,z):0\le x\le p,y=0,0\le z\le q\}}$ – плоскость изменения типа уравнения (12).

Изучена задача Дирихле: *найти решение* $\boldsymbol{u\equiv u(x,y,z)}$ *уравнения* (12) *в области* $\boldsymbol{\Omega/J}$ *со следующими свойствами: 1)* $\boldsymbol{u\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^2(\Omega^+\cap\Omega^-)}$*; 2)* $\boldsymbol{u_y\in L_2(0<x<p,0<z<q)}$ *равномерно по x и z при всех* $\boldsymbol{y\in(-\alpha,\beta)}$ *и существует предел* $\boldsymbol{u_y}$ *при* $\boldsymbol{y\to-\alpha}$ *в* $\boldsymbol{L_2(0<x<p,0<z<q)}$ *и удовлетворяет краевым условиям:*

$$u(x,\beta,z)=f_1(x,z),\qquad u(x,-\alpha,z)=f_2(x,z),\qquad 0\le x\le p,\ \ 0\le z\le q,$$
$$u(x,y,0)=0,\qquad u(x,y,q)=0,\qquad 0\le x\le p,\ \ -\alpha\le y\le\beta,$$
$$u(0,y,z)=0,\qquad u(p,y,z)=0,\qquad -\alpha\le y\le\beta,\qquad 0\le z\le q.$$

Справедливы теоремы

Теорема1. *Задача Дирихле для уравнения* (12) *в области* $\boldsymbol{\Omega}$ *имеет не более одного решения тогда и только тогда, когда для всех* $\boldsymbol{n,m\in\mathbb{N}}$ *выполнено неравенство*

$$E_{n,m}(\alpha,\beta) \equiv sh\left(\beta\sqrt{R_{n,m}}\right)\cdot\cos\left(\alpha\sqrt{R_{n,m}}\right) + ch\left(\beta\sqrt{R_{n,m}}\right)\cdot\sin\left(\alpha\sqrt{R_{n,m}}\right) \neq 0,$$

где $R_{n,m} = \pi^2\left(\frac{n^2}{p^2}+\frac{m^2}{q^2}\right)$.

Теорема 2. *Пусть: 1) постоянные* α,β,p,q *таковы, что для всех* $n,m \in \mathbb{N}$, *имеет место неравенство* $E_{n,m}(\alpha,\beta) \neq 0$; *2)* $f_j(x,z) \in C^3(S_j), j = 1,2$; $f_j(0,z) = f_j(p,z) = 0$, $f_{jxx}(0,z) = f_{jxx}(p,z) = 0$, $f_j(x,0) = f_j(x,q) = 0$, $f_{jzz}(x,0) = f_{jzz}(x,q) = 0, j = 1,2$, *где* $S_1 = \{(x,y,z): 0 \le x \le p, y = \beta, 0 \le z \le q\}$, $S_2 = \{(x,y,z): 0 \le x \le p, y = -\alpha, 0 \le z \le q\}$. *Тогда существует единственное решение задачи Дирихле для уравнения* (12) *в области* Ω.

Модельная задача 10. В рассматривается уравнение

$$sgny|y|^m(V_{xx}+V_{zz}) + V_{yy} = 0, \qquad m > 0 \tag{13}$$

в бесконечной цилиндрической области Ω трехмерного пространства (x,y,z), ограниченной поверхностями:

$$S_0:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (1-2\beta)^2 y^{2+m} = \frac{1}{4}, \qquad y \ge 0, \qquad -\infty < z < +\infty,$$
$$S_1: x = 0, \qquad -\alpha \le y \le 0, \qquad -\infty < z < +\infty,$$
$$S_2: x = 1, \qquad -\alpha \le y \le 0, \qquad -\infty < z < +\infty,$$
$$S_1: 0 \le x \le 1, \qquad y = -\alpha, \qquad -\infty < z < +\infty,$$

где $2\beta = m/(2+m)$, $\alpha = (1-2\beta)^{2\beta-1}$. Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

Изучена задача Дирихле: *найти решение* $V = V(x,y,z)$ *уравнения* (13) *в области* Ω *со следующими свойствами: 1)* $V \in C(\overline{\Omega})$; *2)* $V \in C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$; *3)* V *удовлетворяет краевым условиям:*

$$V|_{S_0} = \Phi(x,z), \qquad V|_{S_3} = 0, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad -\infty < z < +\infty\,,$$
$$V|_{S_1} = 0, \qquad V|_{S_2} = 0, \qquad -\alpha \le x \le 0, \qquad -\infty < z < +\infty,$$

$\lim\limits_{z\to\pm\infty} V = 0$ *равномерно относительно* $(x,y) \in \overline{\Omega} \cap \{z = 0\}$.

Дирихле для уравнения (13) эквивалентно редуцируется к плоской задаче Дирихле для уравнения

$$sgny|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 sgny|y|^m \cdot u = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{14}$$

в области $D = \Omega \cap \{z = 0\}$, а $D^+ = D \cap (y > 0), D^- = D \cap (y < 0)$, $\Gamma_i = S_i \cap \{z = 0\}$ $(i = 0,1,2,3)$ – граница области D.

Задача Дирихле. *Найти решение* $u \equiv u(x,y,\lambda)$ *уравнения* (14) *в области* D, *обладающее следующими свойствами: 1)* $u \in C(\overline{D})$*;2)* $u \in C^1(D) \cap C^2(D^+ \cap D^-)$ *за исключением, быть может, характеристик уравнения* (17)*; 3) и удовлетворяет краевым условиям:* $u(x,\beta,\lambda) = \psi_1(x,\lambda)$, $u(x,-\alpha,\lambda) = \psi_2(x,\lambda), 0 \le x \le l, \lambda \in \mathbb{R}$, $u(0,y,\lambda) = 0$, $u(l,y,\lambda) = 0$, $-\alpha \le y \le \beta, \lambda \in \mathbb{R}$, *где*

$$\psi_j(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_j(x,z)e^{i\lambda z}\,dz, \qquad j = 1,2; \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Имеет место

Теорема. *Пусть: 1) существуют постоянные величины* α, β, l *такие, что для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}$ *имеет место неравенство*

$$E_n(\alpha_1, \beta_1) \equiv J_p\big(\alpha_1 \mu_n(\lambda)\big) I_{-p}\big(\beta_1 \mu_n(\lambda)\big) + J_{-p}\big(\alpha_1 \mu_n(\lambda)\big) I_p\big(\beta_1 \mu_n(\lambda)\big) \neq 0,$$

где $\alpha_1 = 2p\alpha^{\frac{1}{2p}}$, $\beta_1 = 2p\beta^{\frac{1}{2p}}$, $\mu_n^2(\lambda) = \lambda^2 + k_n^2$, $k_n = j_{p,n} \Big/ \left(2pl^{\frac{1}{2p}}\right)$, $j_{p,n}$ *- корни функции Бесселя первого рода порядка* $p = 1/(2+m)$; *2) функции* $\psi_1(x, \lambda)$ *и* $\psi_2(x, \lambda)$ *удовлетворяет условиям теоремы Гобсона при любом действительном значении параметра* $\lambda \in \mathbb{R}$; *3) для всех* $n = 1,2,3, \dots$ *и фиксированных значений параметра* $\lambda \in \mathbb{R}$ *имеет место неравенство* $\inf\limits_n \sqrt{\mu_n(\lambda)}\, |E_n(\alpha_1, \beta_1)| > 0$.

Тогда существует единственное решение задачи Дирихле для уравнения (14) *в области* D.

ЛИТЕРАТУРА

1. 1.Bourgin P.G., Duffin R.The Dirichlet problem the virbating string equation. Bull. Amer. Math. Soc., 1939, 45, №12 , p. 851-858.
2. 2.Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа. Докл. АН СССР, 1953, т. 122, №2, с. 167-170.
3. 3.Нахушев А.М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области. Диф. уравнения, Минск, 1970, т.6, №1, с. 190 - 191.
4. 4.Хачев М.М. Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа в канонических областях. // Монография. Нальчик: Изд-во "Эльбрус", 1998. - 170 с.

Hachev Muhadin Muharbievich
Kabardino-Balkaria State Agrarian University V.M. Kokova
Russia, Nalchik
E-mail: khachev.mukhadin@yandex.ru

On some model problems in the theory of equations of mixed type

Abstract. The paper presents the main results of domestic and foreign authors. Formulated the model boundary value problems and the results of the author for mixed-type equations in the canonical areas.

Keywords: partial differential equations; the equations of mixed type; Dirichlet problem; a method «abc»; the method of integral transforms; Bessel functions.

REFERENCES

1. 1.Bourgin PG, Duffin R.The Dirichlet problem the virbating string equation. Bull. Amer. Math. Soc., 1939, 45, №12, p. 851-858.
2. 2.Bitsadze AV Incorrectness of the Dirichlet problem for equations of mixed type. Dokl. USSR Academy of Sciences, 1953, t. 122, №2, p. 167-170.
3. 3.Nahushev A.M. Criterion for the uniqueness of the Dirichlet problem for the equation smeshan¬nogo type in a cylindrical domain. Diff. equation, Minsk, 1970, Volume 6, №1, p. 190 - 191.
4. 4.Hachev MM The first boundary value problem for linear mixed-type equations in the canonical areas. // Monograph. Nalchik: Publishing house "Elbrus", 1998. - 170 p.