Мир науки. Педагогика и психология / World of Science. Pedagogy and psychology https://mir-nauki.com

2026, Том 14, № 2 / 2026, Vol. 14, Iss. 2 https://mir-nauki.com/issue-2-2026.html

URL статьи: https://mir-nauki.com/PDF/10PDMN226.pdf

5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования) (педагогические науки)

Ссылка для цитирования этой статьи:
Степаненко, Г. А. Решение задач в целых числах на уроках математики для школьников младшего и среднего возраста / Г. А. Степаненко, Т. А. Пономаренко, Д. Р. Сытникова // Мир науки. Педагогика и психология. — 2026. — Т. 14. — № 2. — URL: https://mir-nauki.com/PDF/10PDMN226.pdf.

For citation:
Stepanenko G.A., Ponomarenko T.A., Sytnikova D.R. Solving problems in whole numbers in math lessons for younger and middle-aged students. *World of Science. Pedagogy and psychology*. 2026;14(2): 10PDMN226. Available at: https://mir-nauki.com/PDF/10PDMN226.pdf. (In Russ., abstract in Eng.).

УДК 511.12; 511.13

Степаненко Геннадий Алексеевич
ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт», Железноводск, Россия
Доцент кафедры «Гуманитарных и социально-экономических дисциплин»
Кандидат технических наук, доцент
E-mail: stepang46@mail.ru
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=737124

Пономаренко Татьяна Антоновна
ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт», Железноводск, Россия
Заместитель директора по учебной и научной работе
Кандидат педагогических наук, доцент
E-mail: tanyakmv2503@yandex.ru
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=728409

Сытникова Данута Ришардовна
ГБОУ Средняя общеобразовательная школа № 291 г. Санкт-Петербурга, Санкт-Петербург, Россия
Учитель математики
E-mail: Danuta.sytnikova@mail.ru

Решение задач в целых числах на уроках математики для школьников младшего и среднего возраста

Аннотация. Статья посвящена одному из наиболее интересных разделов теории чисел, а именно, — решению уравнений и неравенств в целых числах. В настоящее время решение уравнений в целых числах имеет не только теоретический интерес. Такие уравнения встречаются в различных областях современной науки и имеют множество практических применений. Школьники начинают знакомиться с задачами в целых числах еще в начальных классах при изучении состава натуральных чисел и свойств арифметических действий. Начиная со второго класса им даются понятия буквенных выражений, уравнений с неизвестными величинами и способами их решений. В 5–7 классах ученики осваивают множество целых чисел. Задачи усложняются и представляют определенные трудности при их решении. Здесь собраны простые методы обучения, обеспечивающие необходимую доступность учебного материала и помогающие усвоить логические приемы, с которыми приходится сталкиваться школьникам младшего и среднего возраста при решении задач в целых числах различного уровня сложности. Приводятся интересные классические задачи из «старых» книг. Материалы

статьи будут полезными студентам педагогических направлений и учителям школ для развития логического мышления и вычислительных навыков учащихся на уроках математики.

Ключевые слова: задачи в целых числах; математика; методы обучения; логические приемы при решении задач; школьники младшего и среднего возраста

Введение

С задачами в целых числах школьники начинают знакомиться в начальных классах. В первую очередь их просят подсчитать количество каких-либо предметов, изображенных на картинках и рисунках, формируя понятия «больше», «меньше», «равно или столько же». Таким образом они приходят к интуитивному (абстрактному) понятию числа. Сравнивая однородные количества, они получают понятие о величине. Имея несколько однородных величин, выбирают одну из них (меру) и сравнивают с нею остальные величины. При этом они оперируют целыми положительными (натуральными) числами.

В дальнейшем изучают состав натуральных чисел и свойства арифметических действий. Начиная со второго класса им даются понятия буквенных выражений, уравнений с неизвестными величинами и способами их решений. В 5–7 классах ученики осваивают множество целых чисел. Задачи усложняются и представляют определенные трудности при их решении.

Отрадно заметить, что в школьных учебниках по математике появились «Странички для любознательных», «Готовимся к олимпиаде», задания повышенной сложности и задания высокой сложности. Мы не будем дублировать материал учебников. Во многих случаях задачи в целых числах относят к олимпиадным задачам, они имеют нестандартный характер и иногда могут соответствовать принципу опережающего обучения. Главное, чтобы ученик смог проявить смекалку. Эффектны простые задачи, требующие неожиданного поворота мысли.

В данной статье остановимся на решении задач в целых числах для школьников младшего и среднего возраста. Материалы статьи будут полезными студентам педагогических направлений и учителям школ для развития логического мышления и вычислительных навыков учащихся на уроках математики.

Методы исследования

Остановимся на некоторых исторических сведениях прошлого. Первой книгой по внедрению десятичной системы в России была Арифметика Леонтия Филипповича Магницкого. Она имела следующее название: «Арифметика, наука числительная. С разных диалектов переведена, и во едино собрана, и на две книги разделена», издание 1703 г. Написана на старославянском языке, содержала 673 страниц [1]. Эта книга послужила путеводной звездой М.В. Ломоносову.

В первой части книги даются определения и правила.

<u>Определение первое.</u> Что есть нумерация.

«Нумерация — есть счисление, если совершенно все числа речью именовать, которые в десяти наименованиях или изображениях содержатся, и изображаются они: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, из них же девять наименовательны суть: последнее же 0 (нуль если цифрою, или ничем именуется) когда оно одно стоит, тогда само в себе ничего не значит. Когда же его к наименованным приложить, тогда умножает в десятеро, как предложено ниже» [1]:

<u>Персты:</u>

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	Цифры
один	два	три	четыре	пять	шесть	семь	восемь	девять	нуль	

Эти изображения у многих называются персты.

Составы:

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200
десять	двадцать	тридцать	сорок	пятьдесят	шестьдесят	семьдесят	восемьдесят	девяносто	сто	двести

Эти числа именуются составы, они цифрой 0 всегда в десятеро составляются.

Сочинения:

11	13	15	17	19	21	23	25
один на дцать	три на дцать	пять на дцать	семь на дцать	девять на дцать	двадцать один	двадцать три	двадцать пять

Эти числа сочинениями называются, они из перстов и составов сочиняются.

Более понятным (не старославянским) языком общие правила письменного исчисления приведены в Руководстве к арифметике Н.В. Бугаева [2]:

«***Письменное счисление есть способ изображать все возможные целые числа немногими знаками и выговаривать написанные числа.***

Эти знаки называются цифрами.

Цифра есть условный знак, служащий для изображения чисел. Цифр десять. Первые девять цифр изображают первые девять чисел:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
один	два	три	четыре	пять	шесть	семь	восемь	девять

Они называются ***значащими*** цифрами.

Нуль. Десятая цифра есть 0 (нуль). Знак этот не выражает никакого числа, а указывает только на отсутствие единиц.

Единицы различных порядков изображают следующим образом:

единица	1
десять	10
сто	100
тысяча	1000
десять тысяч	10000
сто тысяч	100000
миллион	1000000

Числа ***двадцать, тридцать***... получатся, когда мы к цифрам 2, 3, 4... приставим справа по нулю: двадцать 20, тридцать 30, сорок 40…

Числа ***двести, триста***... получатся, когда к цифрам 2, 3, 4... присоединим справа по два нуля: двести 200, триста 300, четыреста 400…

Числа две тысячи, три тысячи... получатся, когда к цифрам 2, 3, 4,… присоединим справа по три нуля: 2000, 3000 и т. д.

Присоединяя справа нуль, мы тем самым повышаем порядок цифр на единицу.

Общие правила письменного счисления. При изображения всех остальных чисел нужно руководиться следующими двумя правилами:

1. ***Всякая цифра, стоящая слева от какой-нибудь цифры, означает единицы следующего высшего порядка***.

2. ***Если в каком-нибудь порядке нет единиц, нужно на этом месте ставить нуль***.» [2, с. 11–13].

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Приведем краткую справку о том, когда впервые появились общеупотребительные теперь знаки арифметических действий, обозначения дроби, степени и др. [3, с. 54]:

$+$ и $-$ в рукописях Леонардо-да Винчи (1452–1519);

$\times$ в сочинении Утреда (1631);

$\cdot$ и $:$ в сочинении Лейбница (1646–1716);

$\frac{a}{b}$ в сочинении Фибоначчи (1202);

a^n в сочинении Шюке (1484);

$=$ в сочинении Рекорда (1557);

$>$ и $<$ в сочинении Гарриота (1631);

$(\ )$ и $[\ ]$ в сочинении Жирара (1629).

Начиная со второго класса школьникам дается понятие буквенного выражения и уравнения. Объясняется, что уравнение — это равенство, содержащее неизвестное число. Неизвестное число обозначается маленькими латинскими буквами, например x (икс). Решить уравнение — значит найти все такие значения x, при которых равенство будет верным. Решаются различные примеры с неизвестными величинами.

В третьем классе ученики узнают правила:

1. ***При умножении любого числа на нуль получается нуль.***

2. ***Делить на нуль нельзя!***

3. ***Если к любому числу прибавить (или отнять) нуль, то получится то же самое число.***

4. ***Если любое число умножить на единицу, то получится то же самое число.***

В 5–6 классах необходимо усвоить основные истины о делимости чисел.[1]

«**1)** ***Если каждое слагаемое делится на одно и то же число, то и сумма разделится на это число;***

2) ***Если одно слагаемое не делится, а все прочие делятся на какое-нибудь число, то сумма не разделится на это число;***

3) ***Если уменьшаемое и вычитаемое делятся на одно и то же число, то и разность делится на это число;***

4) ***Если один из сомножителей делится на какое-нибудь число, то и произведение разделится на это число;***

5) ***Если два числа делятся на одно и то же число, то и остаток от деления их друг на друга разделится на это число;***

6) ***Если делитель и остаток делятся на какое-нибудь число, то и делимое разделится на то же число.***»

[1] Степаненко, Г.А. Руководство к арифметике целых и дробных чисел: учебно-методическое пособие / Г.А. Степаненко, Т.А. Пономаренко, Д.Р. Сытникова — Майкоп: Магарин О.Г. 2024. — 81 с.

Для решения ниже приведенных задач достаточна весьма скромная математическая подготовка и знание элементарных правил арифметики. Тем не менее содержание подобранных задач весьма разнообразно: от пестрого подбора головоломок и замысловатых трюков математической гимнастики до полезных практических приемов счета и измерения.

Результаты исследования

Рассмотрим несколько задач из книги Живая математика Якова Исидоровича Перельмана [4]:

Отметим, что под понятием **целое число** в этих задачах подразумевается **целое положительное** (или натуральное) **число**.

1. «*Какие два целых числа, если их перемножить, составят семь*?»

<u>Ответ прост</u>: 1 и 7. Других таких чисел нет.

2. «*Какие два целых числа, если их сложить, дают больше, чем их перемножить?*»

Таких чисел сколько угодно: $\begin{array}{l} 3 \text{ и } 1{:}\ \ 3\cdot 1 = 3;\ 3 + 1 = 4; \\ 10 \text{ и } 1{:}\ 10\cdot 1 = 10;\ 10 + 1 = 11, \end{array}$

И вообще всякая пара целых чисел, из которых одно — единица.

Это оттого, что от прибавления 1 число увеличивается, а от умножения на единицу — остается без перемены.

3. «*Какие два целых числа, если их перемножить, дают столько же, сколько получается от их сложения*?»

<u>Ответ</u>: Числа эти 2 и 2. Других целых чисел с такими свойствами нет.

4. «*Какие три целых числа, если их перемножить, дают столько же, сколько получается от их сложения*?»

<u>Ответ</u>: 1, 2 и 3 дают при перемножении и при сложении одно и то же

$$1+2+3=6; \quad 1\cdot 2\cdot 3=6.$$

После решения этой задачи школьникам следует задать вопрос: — «Сколько различных решений имеет система уравнений $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x\cdot y\cdot z=6 \end{cases}$, описывающая условия этой задачи? Здесь надо пояснить, что система симметрична относительно трех переменных и их перестановка должна учитываться. Таких решений будет шесть: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) и (3, 2, 1). Это соответствует правилам, что «От перестановки слагаемых сумма не меняется» и «От перестановки сомножителей произведение не меняется», но варианты считаются разными.

Старинные задачи

1. *Народная задача*

«Прилетели галки,

Сели на палки.

Если на каждой палке

Сядет по одной галке,

То для одной галки

Не хватит палки.

Если же на каждой палке

Сядет по две галки,

То одна из палок

Будет без галок.

Сколько было галок?

Сколько было палок?» [5, с. 103].

Решим эту задачу с использованием уравнения с двумя неизвестными.

Пусть $x - галки;\quad y - палки$. Легко сообразить, что галок было чётное число, а палок на одну меньше. Составляем уравнение из условия задачи «Сядет по две галки, то одна из палок будет без галок»: $x = 2(y-1)$.

При условии, что $x = y + 1$ (или $y = x - 1$) единственным решением уравнения является $x = 4$, $y = 3$.

Ответ: четыре галки, три палки.

В книге Забавная арифметика [6, с. 37] приводится эта же старинная задача при других исходных данных.

2. «*Летели галки, видят — палки. Стали рассаживаться. Попробовали сесть по одной на палку — четырем галкам не хватило палок. Стали садиться по две на палку — одна палка осталась незанятой. Сколько было галок и сколько — палок*?»

Записываем аналогичные предыдущей задачи уравнения:

$x = 2(y-1)$ при условии $x = y + 4$. Получаем

$y + 4 = 2(y-1) \Rightarrow y = 6;\ x = 6 + 4 = 10$.

Ответ: 10 галок, 6 палок.

3. «*Два крестьянина расположились у лесной опушки закусить. В это время к ним подошел путник и попросил поделиться завтраком, пообещав уплатить, что следует. Те согласились и достали свой скудный завтрак: у одного крестьянина было 2 хлебца, а у другого такой же один. Все втроем закусили, причем ели поровну. Уходя, путник уплатил за свою долю 5 копеек.*

Как крестьяне должны разделить деньги между собой?» [6, с. 37].

Решение. Трое съели 3 хлебца. Следовательно, каждый съел по одному хлебцу. Поэтому тот крестьянин, у которого был один хлебец, не получает ничего, а все 5 копеек должны достаться другому крестьянину, у которого было 2 хлебца.

4. «*Сошлись два пастуха, Иван и Петр. Иван и говорит Петру: «Отдай-ка ты мне одну овцу, тогда у меня будет овец ровно вдвое больше, чем у тебя!». А Петр ему отвечает: «Нет! Лучше ты мне отдай одну овцу, тогда у нас будет овец поровну!*

Сколько же было у каждого овец?» [7, кн. 1].

«Если Иван отдаст одну овцу Петру и у них овец станет поровну, значит, у Ивана на 2 овцы больше, чем у Петра. Если Петр отдаст одну овцу Ивану, то у Ивана будет вдвое больше овец, чем у Петра, то есть в сумме у них четное число овец. Воспользуемся *стратегией обоснованного предположения и проверки* с наглядным представлением данных».[2]

«Допустим, что у Петра было 5 овец, а у Ивана 7 овец:

• • • • •   * * * * * * *

Петр   Иван

Проверка: Если Иван отдаст одну овцу Петру и у них овец станет поровну 6 и 6; Если Петр отдаст одну овцу Ивану, то у Ивана будет вдвое больше овец, чем у Петра, то есть 8 : 4 = 2. Это решение будет единственным. Если мы будем увеличивать (или уменьшать) их количество с учетом разницы в 2 овцы, то пропорция «ровно вдвое больше» нарушится».

Ответ: у Петра было 5 овец, а у Ивана 7 овец.

В советское время были популярными книги: Математическая шкатулка, автор Ф.Ф. Нагибин [8]; Математическая смекалка, автор Б.А. Кордемский [9]; Увлечь школьников математикой, автор Б.А. Кордемский [10]. Часть книги Математическая смекалка была переиздана в 2015 году в серии «Игры разума» [11] и содержала всего 166 задач из 369 задач, опубликованных ранее.

Приведем несколько задач из этих книг.

5. «*Мать для трех своих сыновей оставила утром тарелку слив, а сама ушла на работу. Первым проснулся старший из сыновей. Увидев на столе сливы, он съел третью часть и ушел. Вторым проснулся средний. Думая, что его братья ещё не ели слив, он съел третью часть того, что было и тоже ушёл. Позднее всех встал младший. Увидев сливы, он решил, что его братья ещё не ели их, а потому съел лишь третью часть лежавших на тарелке слив. Когда пришла домой мать, она насчитала на тарелке 8 слив. Сколько всего слив было вначале*?» [8, с. 21].

Эту задачу проще всего решать «с конца», не составляя уравнений, арифметическим способом.

Младший сын оставил на тарелке 8 слив, значит он съел 4 сливы, а увидел 12 слив. Это количество слив оставил ему на тарелке средний сын (2 части), значит он съел 6 слив (1 часть), а увидел 18 слив. Это количество слив оставил ему старший сын (18 слив — 2 части), значит он съел 9 слив. Следовательно, на тарелке вначале было 18 + 9 = 27 слив.

Ответ: вначале было 27 слив.

Эта задача в немного измененной формулировке опубликована в сборнике олимпиадных задач для школьников 4–6 классов [12, с. 6].

6. «*У мальчика столько же сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько в этой семье братьев и сколько сестер*?»

(4–5 класс) [12, с. 5].

Воспользуемся *стратегией визуального представления данных*, которая позволит проще найти ответ по сравнению с алгебраическим методом.

[2] Степаненко, Г.А. Стратегии решения математических задач. Выбор оптимальных решений: учебно-методическое пособие / Г.А. Степаненко, Т.А. Марфутенко, М.Г. Петрова — М: «Знание-М», 2019. — 52 с.

Поскольку у мальчиков и девочек есть сестры и братья, то начнем рассмотрение со следующей схемы: ***Д Д М М М***. Эта схема удовлетворяет первому условию, но противоречит второму, так как у его сестры будет втрое больше братьев. Добавим по одному мальчику и одной девочке, получим схему: ***Д Д Д М М М М***, которая соответствует всем условиям задачи.

Ответ: девочек 3; мальчиков 4.

7. «*Найти два таких числа, что их сумма втрое больше их разности и вдвое меньше их произведения*» (4–6 класс) [12, с. 7].

В оригинальном издании книги [12, с. 49] задача решается с введением понятия частей: «примем разность за одну часть, тогда сумма составляет три части…». Этот подход дети плохо понимают. Проще решить эту задачу с использованием уравнений.

По условиям задачи составляем два уравнения (в натуральных числах):

$$\begin{cases} x+y=3(x-y) \\ x\cdot y=2(x+y) \end{cases}.$$

Раскрывая скобки в первом уравнении, получаем $x+y=3x-3y;\ 4y=2x;\ x=2y.$

Подставляя найденное значение *x* во второе уравнение, имеем $2y\cdot y=2\cdot 3y.$ Сокращая обе части уравнения на $2y\neq 0$, получим $y=3$ и $x=2y=2\cdot 3=6$.

Ответ: 6 и 3.

8. «*Найти частное двух чисел, если оно в два раза меньше одного из них и в шесть раз больше другого.*» (5–7 класс) [12, с. 7].

Решаем задачу алгебраическим способом. Обозначим одно из чисел чрез ***a***, а другое через ***b***. Частное двух чисел — это две дроби $\frac{a}{b}$ или $\frac{b}{a}$, т. е. задача имеет два симметричных решения. По условию частное равно $\frac{a}{2}$ и $6b$, т. е. ($\frac{a}{2}=6b$), откуда частное равно $\frac{a}{b}$=12 или $\frac{b}{a}=\frac{1}{12}$.

Ответ: 12 или $\frac{1}{12}$.

9. «*В выражении* 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8: 9 *расставить скобки так, Чтобы результат был: а) минимальным; б) максимальным.*» (4–7 класс) [12, с. 10].

Решение. Частное будет минимальным, если в числителе будет стоять наименьшее число 1 и будет наибольшим знаменатель дроби. По правилам деления единица делится последовательно на каждое из остальных чисел, т. е. на их произведение (в исходном выражении скобки не расставляем)

$$1:2:3:4:5:6:7:8:9=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}.$$

Частное будет максимальным, если в исходном выражении расставить скобки следующим образом:

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

$$1:(2:3:4:5:6:7:8:9)=1:\frac{2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}=\frac{1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{2}=3\cdot2\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9.$$

Вычислять эти значения не нужно.

Ответ: а) $1:2:3:4:5:6:7:8:9=\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}$;

б) $1:(2:3:4:5:6:7:8:9)=3\cdot2\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9$.

Рассмотрим несколько *нестандартных задач на восстановление знаков действий*[3].

10. «*В примере* $9*7*3*5*2=10$ *поставьте вместо каждой из звёздочек знаки сложения или вычитания так, чтобы равенство было верным*» (5–7 класс).[3]

Решение. Поскольку в примере речь идет об арифметических действиях только сложения или вычитания, то целесообразно подсчитать сумму пяти чисел в левой части выражения — это 18, и соответствующим образом поставить два знака минус перед числами 3 и 5, т. е. $9+7-3-5+2=10$.

Ответ: $9+7-3-5+2=10$.

11. «*Расставьте знаки сложения или вычитания между цифрами*

1 2 3 4 5 6 7

так, чтобы в результате получилось число 55.» (5–7 класс).[3]

Эта задача сложнее предыдущей и имеет несколько решений.

А) Возьмем, например, число 34 и оценим сумму оставшихся чисел

$1+2+5+6+7=21$. Складываем 34 + 21 = 55, что соответствует условию задачи.

Итак: $1+2+34+5+6+7=55$.

Б) Возьмем число 56, а из оставшихся чисел постараемся с помощью знаков сложения и вычитания получить минус 1.

Имеем: $1-2+3+4+56-7=55$.

В) Возможна еще комбинация с использованием трехзначного числа 123 и двузначного числа 67.

$123+4-5-67=55$.

Ответ: $1+2+34+5+6+7=55$; $1+2+34+5+6+7=55$; $123+4-5-67=55$.

12. «*В записи* $1*2*3*4*5=100$ *замените каждую из звездочек знаками арифметических действий и расставьте скобки так, чтобы получилось верное равенство*» (5–7 класс).[3]

Нетрудно догадаться, что, используя только знаки сложения и вычитания, решить задачу не удастся. Нужно рассматривать еще и знак умножения. Возникает идея представить число 100 в виде произведения $5\cdot20=100$ и теперь легко записать решение

$$1\cdot(2+3)\cdot4\cdot5=100.$$

[3] Галкин, Е.В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: Учеб. пособие для учащихся 7–11 кл. — Челябинск. Взгляд, 2005. — 271 с. (С. 6, 7).

Ответ: $1\cdot(2+3)\cdot 4\cdot 5=100$.

Рассмотрим несколько задач на *числовые и буквенные ребусы*. Их часто называют *числовыми головоломками* [4] или задачами на *восстановление знаков действий*.

13. **Тысяча.**

«*Можете ли вы число 1000 выразить восемью одинаковыми цифрами? При этом, кроме цифр, разрешается пользоваться также знаками действий*» [4, с. 55].

«*У Коли в тетради написано*

$$8\ \ 8\ \ 8\ \ 8\ \ 8\ \ 8\ \ 8\ \ 8=1000.$$

Оказывается, он в некоторых местах забыл поставить знаки сложения. Где именно?».[3]

Вторая формулировка задачи проще первой, в ней указаны цифры и действие сложения. Решается так:

$$888+88+8+8+8=1000.$$

В первой формулировке Я. Перельмана эта задача имеет и другие решения.

Например:

$$(5+5)\cdot(5+5)\cdot(5+5)+5-5=1000;$$

$$(1111-111)\cdot 1=1000;$$

$$(3+3+3+3:3)^3+3-3=1000.$$

И вообще, $(\times\times\times\times-\times\times\times):\times=1000$, где за $\times$ обозначена любая из цифр $1, 2,...,9$.

Числовые ребусы.

В задачах на числовые ребусы действия выполняются над натуральными числами, только цифры обозначаются не звездочками, а б у к в а м и. При этом имеется ввиду, что *одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры.* Кроме того, *первая цифра* каждого числа должна быть *отличной от нуля.* Если задача имеет не один ответ, требуется найти их в с е.

Приведем несколько задач для школьников 1–4 классов из Большой книги примеров и заданий по всем темам курса начальной школы авторов О.В. Узоровой и Е.А. Нефёдовой[4].

1. «*Замени буквы числами.*» [с. 21, 25][4].

Н + Р + Л = 8	С + Б + Р = 9
Н + Р = 6	Б + Р = 7
Н + Л = 2	С + Б = 5

2. «*Расшифруй примеры*» [с. 29][4].

Ф + Б = 5	Н + Р = 6	Ф + Б = 5	Н + Р = 6
Ф > Б на 1	Р < Н на 2	Ф > Б на 1	Р < Н на 2
Ф – ..., Б – ...,	Р – ..., Н – ...	Ф – ..., Б – ...,	Р – ..., Н – ...

[4] Большая книга примеров и заданий по всем темам курса начальной школы. Математика 1–4 классы / О.В. Узорова, Е.А. Нефёдова. — М.: Издательство Астрель, 2011. — 466 с.

3. «*Логические примеры* (без скобок). *Для составления примеров используй знаки* « + », « - », « · », «: » [с. 304–308][4].

	2 2 2 2 = 46	3 3 3 3 3 = 5	4 4 4 4 = 7
1 1 1 1 = 12	2 2 2 2 = 42	3 3 3 3 3 = 10	4 4 4 4 4 = 72
1 1 1 1 = 121	2 2 2 2 2 = 15	3 3 3 3 3 = 93	4 4 4 4 4 = 64
1 1 1 1 1 = 122	2 2 2 2 2 = 11	3 3 3 3 3 = 99	4 4 4 4 4 = 56
1 1 1 1 1 = 120	2 2 2 2 2 = 7	3 3 3 3 3 = 100	4 4 4 4 4 = 55
5 5 5 5 5 5 = 11	7 7 7 = 11	8 8 8 = 11	9 9 9 = 729
5 5 5 5 5 5 = 56	7 7 7 7 7 = 25	8 8 8 8 8 = 11	9 9 9 = 11
5 5 5 5 5 = 54	7 7 7 7 7 = 11	8 8 8 8 8 = 1	9 9 9 9 9 = 29
5 5 5 5 5 5 = 26	7 7 7 7 7 = 3	8 8 8 8 8 = 77	9 9 9 9 9 = 11
5 5 5 5 5 5 = 17	7 7 7 7 7 = 83	8 8 8 8 8 8 = 17	9 9 9 9 9 = 7

4. «*Логические примеры* (со скобками). *Для составления примеров используй знаки* « + », « - », « · », «: » [с. 309–312][4].

1 1 1 1 = 12	2 2 2 2 = 10	3 3 3 3 = 12	4 4 4 4 = 12	5 5 5 5 = 12
1 1 1 1 1 = 24	2 2 2 2 2 = 80	3 3 3 3 3 = 66	4 4 4 4 4 = 96	5 5 5 5 5 = 30
1 1 1 1 1 = 22	2 2 2 2 2 = 96	3 3 3 3 3 = 24	4 4 4 4 4 = 88	5 5 5 5 5 = 80
1 1 1 1 1 = 10	2 2 2 2 2 = 44	3 3 3 3 3 = 42	4 4 4 4 4 = 28	5 5 5 5 5 = 13
1 1 1 1 1 = 12	2 2 2 2 2 = 18	3 3 3 3 3 = 13	4 4 4 4 4 = 60	5 5 5 5 5 = 11
6 6 6 6 6 = 22	7 7 7 7 = 12	8 8 8 8 = 12		
6 6 6 6 6 6 = 90	7 7 7 7 7 = 84	8 8 8 8 8 = 13		
6 6 6 6 6 6 = 78	7 7 7 7 7 = 13	8 8 8 8 8 = 11		
6 6 6 6 6 6 = 66	7 7 7 7 7 = 22	8 8 8 8 8 = 22		
6 6 6 6 6 6 = 54	7 7 7 7 7 7 = 91	8 8 8 8 8 = 24		

Оставляем эти задачи для самостоятельного решения.

5. «*Решите ребус*» (5–7 класс).[5]

$$\text{СИ}\cdot\text{СИ}=\text{СОЛЬ}$$

Произведение одинаковых двузначных чисел и его квадрат начинаются с одной и той же буквы С. Это возможно только при С = 1 и С = 9. Но первый вариант отпадает, так как в этом случае $\text{СИ}\cdot\text{СИ}$ трёхзначное число. Следовательно, С = 9.

Квадрат числа 9И начинается с цифры 9, значит минимальное значение И = 5. Проверяем случаи: СИ = 95, СИ = 96, СИ = 97 и СИ = 98.

$95^2 = 9025$ (противоречие И = Ь); $96^2 = 9216$ (противоречие И = Ь); $97^2 = 9409$ (противоречие С = Ь); $98^2 = 9604$ (нет противоречий *одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры*).

<u>Ответ:</u> $98\cdot 98 = 9604$.

6. «*Решите ребус*» (5–7 класс).[4]

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{ОДИН}\\ \text{ОДИН}\end{array}\\ \hline \text{МНОГО}\end{array}$$

[5] Галкин, Е.В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: Учеб. пособие для учащихся 7–11 кл. — Челябинск. Взгляд, 2005. — 271 с. (С. 18, 19).

10PDMN226
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Несложным подбором находим: М = 1; Н = 3; О = 6; И = 2; Г = 4; Д = 8.

Ответ: 6823 + 6823 = 13646.

На многих уроках математики найдется несколько минут на решение нестандартных задач и на смекалку. Если задача нетрудная, ее можно включить в устные упражнения в начале урока. Если задача сложная, следует предложить детям поразмыслить над условием дома и вернуться на одном из следующих уроков к ее решению.

Приведем несколько таких задач из книги В.Н. Русанова Математические олимпиады младших школьников.[6]

1. «*К однозначному числу приписали такую же цифру. Во сколько раз увеличилось число*?» [с. 10][6].

Дети на примерах быстро догадываются, что число увеличивается в 11 раз.

2. «*Из цифр 2 и 3 составь два двузначных числа с разными цифрами. Найди их сумму. Если брать другие пары разных цифр, меньших 6, всегда ли получится число, которое делится на 11*?» [с. 10][6].

В результате суммирования всегда получится двузначное число, записанное одинаковыми числами, которое делится на 11. Таких пар десять: 1 и 2; 1 и 3; 1 и 4; 1 и 5; 2 и 3; 2 и 4; 2 и 5; 3 и 4; 3 и 5; 4 и 5.

3. «*Имеется набор гирек*: 1 *г*, 2 *г*, 4 *г*, 8 *г*, 16 *г. Можно ли с их помощью уравновесить на чашечных весах деталь массой* 23 *г*? *На чашку с деталью гирьки класть не разрешается. Масса детали — целое число граммов. Подумайте, любую ли деталь до* 31 *г можно уравновесить с помощью этого набора гирь*.» [с. 10][6].

Ответ. 16 + 4 + 2 + 1 = 23. Да, любую деталь массой в целое число граммов, меньше 31, можно уравновесить этими гирьками.

Второй вопрос можно дать детям для обдумывания во внеурочное время.

4. «60 *листов книги имеют толщину* 1 *см. Какова толщина всех листов книги, если в ней* 240 *страниц*?» [с. 11][6].

Дети, как правило, дают неверный ответ: 4 см. Нетрудно догадаться, что 60 листов книги содержат 120 страниц. Следовательно толщина всех листов книги равна 2 см.

5. *В Советское время в обиходе было выпущено 9 монет достоинством* 1 *коп.,* 2 *коп.,* 3 *коп.,* 5 *коп.,* 10 *коп.,* 15 *коп.,* 20 *коп.,* 50 *коп. и* 1 *рубль.*

[6] Русанов, В.Н. Математические олимпиады младших школьников: Книга для учителя. — М.: Просвещение, 1990. — 77 с., с. 10.

Имея один такой набор (каждая монета в одном экземпляре), подумайте, можно ли этими монетами набрать 99 копеек?

Можно. Выбираем 50 + 20 + 15 + 10 + 3 + 1 = 99 копеек.

Объясняем, что без учета монеты в 1 рубль можно составить любую сумму от 1 копейки до 106 копеек (1 рубль и 6 копеек) разными вариантами.

Целесообразно при изучении состава числа 100 провести занятие на уроке в виде игры с заранее заготовленными образцами монет (наклеить напечатанные изображения монет на картон и вырезать их) и предложить ученикам решить примеры с различными суммами.

Рассмотрим классическую задачу на рукопожатия.

6. *Пять человек поздоровались друг с другом, однократно пожав руку. Сколько было всего рукопожатий*?

Задача на рукопожатия имеет несколько решений. Приведем наиболее понятное школьникам решение, основанное на стратегиях *организации данных и распознавания закономерности.*[2]

Представим себе, что в комнату по очереди заходят пять человек: А, Б, В, Г и Д. (Можно по очереди вызывать учеников к доске). Первому человеку А здороваться не с кем, второй человек Б здоровается с первым 1 раз, третий человек В пожимает руку первому и второму 2 раза, четвертый человек Г пожимает руку троим, и пятый человек Д пожимает руку четверым. В таблице 1 представлен алгоритм подсчета рукопожатий.

Таблица 1

Алгоритм подсчета рукопожатий

Организованные данные	А	Б	В	Г	Д	Итого рукопожатий
Номер человека	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
Количество рукопожатий	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**10**

Составлено авторами

Примечание. Если здороваются десять человек, то всего рукопожатий будет

0 + 1 + 2 + 3 + 4 +5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.

Рассмотрим несколько задач на целые числа (задание 13) из Всероссийских проверочных работ по математике для 6 класса.

1. «*В погребе хранилось несколько головок сыра. Ночью пришли мышки и съели* 10 *головок сыра, причём все съели поровну. Следующей ночью пришли не все мышки, а только* 11, *и доели оставшийся сыр, но каждая мышка съела в два раза меньше сыра, чем накануне. Сколько головок сыра хранилось в погребе? Запишите решение и ответ*». (ВПР 6 класс, 2024 г.).

Решение. Эта задача решается алгебраическим способом с составлением уравнения с двумя неизвестными (количество головок сыра и количество мышек).

Пусть в погребе хранилось x головок сыра (требование задачи), а в первую ночь мышек было y. В первую ночь каждая мышь съела $\frac{10}{y}$ головок сыра.

Во вторую ночь мышей было 11, а головок сыра осталось x - 10. Каждая мышь съела $\frac{x-10}{11}$ головок сыра, но по условию задачи в 2 раза с меньшим аппетитом: $2\left(\frac{x-10}{11}\right)=\frac{10}{y}$. Сократим обе части уравнения на 2.

$\left(\frac{x-10}{11}\right)=\frac{5}{y}$; $x-10=\frac{55}{y}$; $x=\frac{55}{y}+10$. Так как во вторую ночь пришли мышки не все, то их было больше 11. Единственным целым решением является y = 55, а x = 11.

<u>*Ответ*</u>: 11 головок сыра.

2. «*Задумали двузначное число, которое делится на* 15. *Когда к этому числу справа приписали последнюю цифру, получилось трехзначное число, которое даёт остаток* 3 *при делении на* 9. *Какое число задумали? Запишите решение и ответ.*» (ВПР 6 класс, 2024 г.).

<u>Решение.</u> Полученное трехзначное число при делении на 9 даёт остаток 3. Применяем указанное в начале статьи правило

6) *Если делитель и остаток делятся на какое-нибудь число, то и делимое разделится на то же число.*

Значит, приписанная цифра — это 0, 3, 6 или 9. Так как задуманное число кратно 5, то его последняя цифра 0. Запишем двузначные числа, которые делятся на 15 и заканчиваются цифрой 0. Это 30, 60 и 90.

Приписываем к ним нули и делаем проверку полученных трехзначных чисел делением на 9

300 = 297 + 3 (остаток 3),

600 = 594 + 6 (остаток 6),

900 = 900 + 0 (остаток 0).

При записи первого ближайшего слагаемого использовался признак делимости на 9 (*сумма цифр делится на* 9).

<u>*Ответ*</u>: 30.

3. «*Саша загадала четырёхзначное число* $\overline{abcd}$. *Когда она вычла из числа сумму его цифр, а у полученной разности зачеркнула одну цифру, то получила число* 151. *Какую цифру зачеркнула Саша?*» (ВПР 6 класс, 2024 г.).

<u>Решение.</u> Четырёхзначное число $\overline{abcd}$ в десятичной системе счисления записывается в виде $1000\cdot a+100\cdot b+10\cdot c+d$. Вычитаем сумму его цифр и получаем $1000\cdot a+100\cdot b+10\cdot c+d-(a+b+c+d)=999\cdot a+99\cdot b+9\cdot c$.

То есть разность $999\cdot a+99\cdot b+9\cdot c$ делится на 9. В полученном числе 151 сумма цифр 1 + 5 + 1 = 7. Для выполнения признака делимости на 9 не хватает цифры 2, значит Саша зачеркнула цифру 2.

<u>*Ответ*</u>: 2.

Переформулируем эту задачу следующим образом.

4. «*Саша загадала четырёхзначное число* $\overline{abcd}$. *Когда она вычла из числа сумму его цифр, а у полученной разности зачеркнула цифру* 2, *то получила число* 151. *Какие четырёхзначные числа могла задумать Саша?*».

10PDMN226
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Даже после решения предыдущей задачи школьники не могли сразу догадаться, как подступиться к решению этой обратной задачи.

Решение. Запишем полученное число 151 и припишем к нему зачеркнутую цифру 2. Получим следующие 4 возможных варианта: 2151, 1251, 1521 и 1512. Сумма цифр всех этих чисел равна 9. Значит, чтобы найти задуманные числа при условии, что разность $999 \cdot a + 99 \cdot b + 9 \cdot c$ делится на 9, надо к записанным числам прибавить число 9.

2151 + 9 = 2160; 1251 + 9 = 1260; 1521 + 9 =1530; 1512 + 9 = 1521.

Ответ: 2160, 1260, 1530, 1521.

Заключение

Мы рассмотрели решение ряда задач в целых числах на уроках математики для школьников младшего и среднего возраста, не дублируя аналогичные задачи из школьных учебников. Отметим следующее.

1. Во многих случаях задачи в целых числах относят к олимпиадным задачам, к задачам повышенной и высокой сложности. Они имеют нестандартный характер, требуют проявить смекалку и неожиданного поворота мысли.

2. Нужно научить школьников понимать сущность решения задач в целых числах на основе простых и интуитивно понятных им свойств и правил, не вдаваясь в тонкости строгих математических определений.

3. Школьникам в первую очередь требуется четко освоить понятие простых чисел, признаки делимости на простые, взаимно-простые и составные числа, простейшие правила о делимости чисел и деление целых чисел с остатком.

4. Требуется разработка учебно-методических пособий для учителей начальных и 5–7 классов. Это относится к отбору материала занимательных задач, к принятию обоснованного решения по их содержанию, по его распределению по годам обучения и рекомендациями по внеклассной работе с учениками.

5. В нашей статье подобраны в основном задачи из «старых» книг, которые не устарели ни со стороны содержания, ни со стороны терминологии, их некоторая элементарность отвечает задачам понимания школьниками изучаемого материала и искупается выразительностью стиля, ясностью мысли, яркостью изложения, а также тем особым интересом, который представляет для каждого подлинная речь старинного классика науки. Много интересных задач можно найти в нижеследующей литературе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтий Магницкий. Арифметика, наука числительная. С разных диалектов на славянский язык переведенная, и воедино собрана, и на две книги разделена / Леонтий Магницкий. — Издание 1703 г. — 673 с. — URL: https://sovietime.ru/component/tags/tag/matematika-starinnye-izdaniya.
2. Бугаев, Н.В. Руководство к АРИФМЕТИКЕ. Арифметика целых чисел / Н.В. Бугаев. — Москва: Книжный магазин Н. И. Мамонтова, 1898. — 152 с. — URL: https://sovietime.ru/component/tags/tag/matematika-starinnye-izdaniya.
3. Перельман, Я.И. Занимательная арифметика. Загадки и диковинки в мире чисел / Я.И. Перельман. — Москва-Ленинград: ГОНТИ Редакция научно-популярной и юношеской литературы, 1938. — 197 с. — URL: https://sovietime.ru/component/tags/tag/matematika-starinnye-izdaniya.

4. Перельман, Яков Исидорович. Живая математика / Яков Исидорович Перельман. — М.: Проспект, 2023. — 288 с. — URL: https://www.livelib.ru/book/1008357940-zhivaya-matematika-yakov-perelman.
5. Ящик загадок и фокусов [Текст] / Я.И. Перельман; Обл. Э. Будогоского. — Москва; Ленинград: Гос. изд-во, 1930 (Л.: гос. тип. им. Евг. Соколовой). — 129 с. — URL: https://search.rsl.ru/ru/record/01009226989.
6. Аменицкий, Н. Н. Забавная арифметика / Н. Н. Аменицкий, И. П. Сахаров. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1991. — 128 с. — URL: https://djvu.online/file/bOUeffiDOOHMk?ysclid=mophif3b5989547318 (дата обращения: 03.05.2026).
7. Игнатьев, Е.И. В царстве смекалки или арифметика для всех. В трех книгах / Е.И. Игнатьев. — Санкт-Петербург: 1914, 1909, 1915 гг. — URL: https://sovietime.ru/component/tags/tag/matematika-starinnye-izdaniya.
8. Нагибин, Ф.Ф. Математическая шкатулка / Ф.Ф. Нагибин. — М.: Просвещение, 1964. — 168 с. — URL: https://sheba.spb.ru/shkola/matemat-shkatulka-1964.htm (дата обращения: 03.05.2026).
9. Кордемский, Б.А. Математическая смекалка / Б.А. Кордемский. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. — 576 с. — URL: https://djvu.online/file/ZL30c6Zq7cCDK (дата обращения: 03.05.2026).
10. Кордемский, Б.А. Увлечь школьников математикой / Б.А. Кордемский. — М.: Просвещение, 1981. — 112 с. — URL: https://djvu.online/file/twDfYYyX5mwHc?ysclid=moph7oju7844734465 (дата обращения: 03.05.2026).
11. Кордемский, Борис. Затейные задачи / Борис Кордемский. — СПб.: Амфора, 2015. — 223 с. — URL: https://search.rsl.ru/ru/record/01007993132.
12. Бабинская, И.Л. Задачи математических олимпиад / И.Л. Бабинская. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1975. — 112 с. — URL: https://djvu.online/file/BVtEuJnU8fRRC (дата обращения: 03.05.2026).
13. Игнатьев, Е.И. В царстве смекалки / Е.И. Игнатьев; под ред. М.К. Потапова. — 4-е изд. — Москва: Наука, 1984. — 189 с. — URL: https://search.rsl.ru/ru/record/01001194019.
14. Перельман, Яков. Веселые задачи [Текст]: занимательные фокусы, логические задачи, игры с танграмами / Яков Перельман. — Санкт-Петербург: Амфора, 2015. — 239 с. — URL: https://search.rsl.ru/ru/record/01008043311.
15. Позаментье, Альфред. Стратегии решения математических задач [Текст]: различные подходы к типовым задачам: [0+] / Альфред Позаментье, Стивен Крулик; [перевод с английского В. Ионов]. — Москва: Альбина Паблишер, 2018. — 222 с. — URL: https://search.rsl.ru/ru/record/01009568378.
16. Дьюдени, Генри. Средневековые головоломки = Средневековые головоломки и "Кентерберийские рассказы" Джеффри Чосера [Текст]: [12+] / Генри Дьюдени; [пер. с англ. Ю.Н. Сударев]. — Санкт-Петербург: Амфора, 2015. — 174 с. — URL: https://search.rsl.ru/ru/record/01007919987.

Stepanenko Gennady Alekseevich
Stavropol State Pedagogical Institute, Zheleznovodsk, Russia
E-mail: stepang46@mail.ru
RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=737124

Ponomarenko Tatyana Antonovna
Stavropol State Pedagogical Institute, Zheleznovodsk, Russia
E-mail: tanyakmv2503@yandex.ru
RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=728409

Sytnikova Danuta Rishardovna
GBOU Secondary School No. 291 of Saint Petersburg, Saint Petersburg, Russia
E-mail: Danuta.sytnikova@mail.ru

Solving problems in whole numbers in math lessons for younger and middle-aged students

Abstract. The article is devoted to one of the most interesting sections of number theory, namely, — solving equations and inequalities in integers. Currently, solving equations in integers has more than theoretical interest. Such equations are found in various fields of modern science and have many practical applications. Schoolchildren begin to get acquainted with integer problems in elementary grades when studying the composition of natural numbers and the properties of arithmetic actions. Starting from the second class, they are given the concepts of letter expressions, equations with unknown values and ways to solve them. In grades 57, students master many integers. Tasks become more complicated and present certain difficulties in solving them. It contains simple teaching methods that provide the necessary availability of educational material and help to learn the logical techniques that younger and middle-aged students have to deal with when solving problems in whole numbers of various difficulty levels. Interesting classic problems from «old» books are given. The article's materials will be useful for students of pedagogical fields and school teachers to develop students' logical thinking and computational skills in mathematics classes.

Keywords: problems in whole numbers; mathematics; training methods; logic techniques for solving problems; elementary and middle school students