УДК 519.6

Хусаинов Ахмет Аксанович
ФГБОУ ВПО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
Россия, Комсомольск-на-Амуре
Доктор физико-математических наук, профессор
E-Mail: kmopvm@knastu.ru

Кудряшова Екатерина Сергеевна
ФГБОУ ВПО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
Россия, Комсомольск-на-Амуре
Кафедра «ИБАС»
Ассистент
E-Mail: ekatt@inbox.ru

Математическая модель для волновых вычислений

Аннотация. В работе рассмотрены вопросы, связанные с волновыми системами. Дано определение волновой системы. Установлено, что в любом пути, соединяющем начальное и конечное место, число фишек постоянно. Доказано, что волновая система не имеет тупиков. Показано, что для каждого состояния волновой системы существует наибольшее множество переходов, которые можно одновременно применить к этому состоянию. Разработан и обоснован метод построения маршрута волновой системы, имеющего минимальное количество блоков.

Ключевые слова: конвейер; волновая система; синхронизационный граф; сеть Петри.

Основные определения

Волновые системы [3] представляют собой обобщения конвейеров и предназначены для распараллеливания серийных вычислений арифметических выражений. Например, для вычисления выражения $\boldsymbol{u_n} = \mathbf{exp}(\boldsymbol{x_n})^{\sin(y_n)} + \mathbf{cos}(\boldsymbol{z_n})$, составляется сеть Петри и по этой сети Петри строится многопоточное приложение.

Введем необходимые определения.

Волновая система задается с помощью числа $\boldsymbol{n} > \mathbf{0}$ и ацикличной сети Петри $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{pre}, \boldsymbol{post}, \boldsymbol{M_0})$ такой, что каждому переходу сети соответствует как минимум одно входное и выходное место, а для каждого места сети выполняется одно из условий:

- существует одна входящая стрелка и одна выходящая;
- существует только одна выходящая стрелка – такое место называется *начальным*;
- существует только одна входящая стрелка – такое место называется *конечным*.

При этом число $\boldsymbol{n}$ характеризует количество фишек в каждом начальном месте сети на момент начальной маркировки $\boldsymbol{M_0}$.

Под *состоянием* волновой системы будем подразумевать маркировку системы в определенный момент времени.

Под *начальной маркировкой* будем понимать такое состояние волновой системы, при котором все фишки (данные) находятся в местах, не имеющих входящих стрелок (рисунок 1, а). Напротив, *конечная маркировка* - состояние волновой системы, при котором все фишки находятся в местах, не имеющих выходящих стрелок (рисунок 1, б).

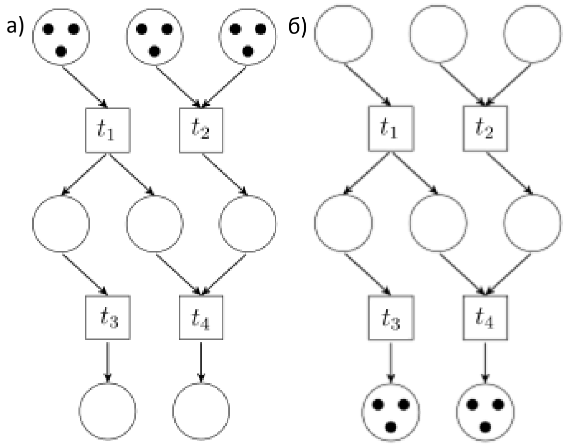

Рис. 1. Маркировка волновой системы:
а – начальная; б – конечная

Тупики в волновых системах

Напомним, что *синхрографом* (или *маркированным графом* [5]) называется такая сеть Петри, в каждое место которой входит ровно одна дуга и из каждого места выходит ровно одна дуга [1].

Волновая система может быть дополнена до синхрографа путем добавления нового перехода, связывающего конечные места с начальными.

Лемма 1. В любом пути, ведущем из начального места к конечному, число фишек постоянно и равно $\boldsymbol{n}$.

Доказательство. Для доказательства этой леммы воспользуемся теоремой [1, теорема 4.4] для синхронизационного графа. Рассмотрим произвольную волновую систему (например, рисунок 1). Дополним её до синхрографа добавлением перехода $\boldsymbol{t}$: конечные места волновой системы будут его входными местами, а начальные – выходными. Любой путь волновой системы, ведущий из начального места к конечному, теперь будет являться циклом синхрографа. По [1, теорема 4.4] число фишек в цикле не меняется при функционировании синхрографа. Соответственно, число фишек в пути волновой системы будет постоянно. ■

Пусть *тупиком* называется достижимая маркировка $\boldsymbol{M}$, при которой не существует $\boldsymbol{M'}$, допускающей срабатывание $\boldsymbol{M} \xrightarrow{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{M'}$. Напомним, что маркировка $\boldsymbol{M}$ называется достижимой из $\boldsymbol{M''}$, если существует переход, переводящий $\boldsymbol{M''}$ в $\boldsymbol{M}$ [5].

В этом смысле, конечная маркировка волновой системы будет тупиком.

Предложение 1. Волновая система не имеет тупиков, за исключением конечной маркировки.

Доказательство. Предположим, что волновая система имеет тупик $\boldsymbol{M}$ и этот тупик не является конечной маркировкой. Из леммы 1 следует, что если $\boldsymbol{M(p) = n}$, для всех конечных мест, то $\boldsymbol{M}$ является конечной маркировкой. Отсюда существует некоторое конечное место $\boldsymbol{p'}$ такое, что $\boldsymbol{M(p') < n}$. Из определения волновой системы следует, что для любого места существует путь в него из некоторого начального места, и существует путь в некоторое конечное место. Для места $\boldsymbol{p'}$ обязательно существует единственный переход со стрелкой $\boldsymbol{t \rightarrow p'}$. Поскольку $\boldsymbol{M}$ – тупик, то переход $\boldsymbol{t}$ не может сработать и, значит, какое-нибудь из его входных мест не содержит фишек. Обозначим это входное место $\boldsymbol{p_1}$. Если $\boldsymbol{p_1}$ не является начальным, то существует переход $\boldsymbol{t_1}$ и стрелка $\boldsymbol{t_1 \rightarrow p_1}$. Переход $\boldsymbol{t_1}$ также имеет входное место, не содержащее фишек. Продолжив процесс движения по волновой системе, мы получим путь из некоторого начального места в искомое место $\boldsymbol{p'}$. Число фишек в этом пути равно $\boldsymbol{M(p') < n}$, что противоречит утверждению леммы 1. Значит, предположение неверно и $\boldsymbol{M}$ – не тупик. ■

Волновая система с минимальным количеством блоков

Пусть $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{M'}$ – достижимые маркировки. Множество достижимых маркировок частично упорядочено отношением $\boldsymbol{M \geq M'}$, если существует последовательность срабатываний переходов $\boldsymbol{M \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \ldots \xrightarrow{t_k} M_k = M'}$.

Предложение 2. Пусть $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ – множество достижимых маркировок. Частично-упорядоченное множество $(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \geq)$ имеет наибольшие и наименьшие элементы.

Доказательство. Поскольку число $\boldsymbol{p \in P}$ мест волновой системы конечно и маркировки $\boldsymbol{M(p)}$ ограничены значением $\boldsymbol{n}$, число достижимых маркировок будет конечно. Известно, что каждое срабатывание перехода переводит маркировку $\boldsymbol{M}$ в $\boldsymbol{M_1}$, такую что $\boldsymbol{M_1 \leq M}$. Рассмотрев последовательность срабатываний переходов $\boldsymbol{M \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \ldots \xrightarrow{t_k} M_k}$, мы достигнем конечной маркировки $\boldsymbol{M'}$, которая и будет являться наименьшим элементом множества $(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \geq)$. Напротив, наибольшим элементом множества $(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \geq)$ будет являться начальная маркировка волновой системы. ■

Лемма 2. Для каждого состояния волновой системы существует наибольшее множество переходов, которые можно одновременно применить к этому состоянию. Будем называть это множество блоком *наибольших срабатываний*.

Доказательство. Представим, что в некоторой маркировке $\boldsymbol{M}$ могут сработать три перехода: $\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}, \boldsymbol{t_3}$. Поскольку переходы разрешены, для каждого из них существует одно или несколько мест, в которых содержится $\boldsymbol{n > 0}$ фишек. По определению волновой системы, каждое место может содержать только одну выходящую стрелку и, следовательно, соответствующие переходы не могут иметь общих мест и являются независимыми. Таким образом, эти переходы могут сработать одновременно. ■

Для примера рассмотрим волновую систему, представленную на рисунке 2.

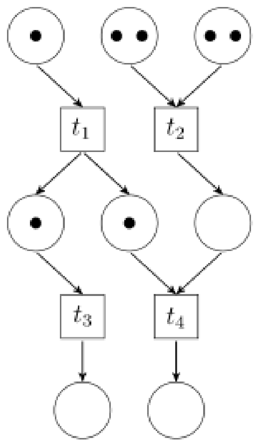

Рис. 2. *Пример волновой системы*

В данном состоянии переходы $\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}$ и $\boldsymbol{t_3}$ могут сработать одновременно. Отсюда, эти переходы принадлежат к наибольшему множеству.

Маршрут – последовательность блоков, состоящих из одновременных срабатываний переходов волновой системы, переводящая начальную маркировку в заданную.

Лемма 3. Любые два маршрута, соединяющие заданные маркировки, состоят из одинаковых букв.

Доказательство. Рассмотрим путь из некоторой маркировки $\boldsymbol{M}$ в конечную маркировку. Если маркировка $\boldsymbol{M}$ имеет фишку в месте $\boldsymbol{p_i}$, то из определения волновой системы следует, что эту фишку можно удалить с помощью единственного перехода $\boldsymbol{t}$, выходящего их этого места. Это означает, что для перехода в конечное состояние переход $\boldsymbol{t}$ должен когда-нибудь сработать. В том случае, если в месте $\boldsymbol{p_i}$ содержится $\boldsymbol{m}$ фишек, переход $\boldsymbol{t}$ должен сработать $\boldsymbol{m}$ раз. Отсюда следует, что все маршруты из маркировки $\boldsymbol{M}$ в конечную маркировку будут состоять из одинаковых букв. ■

Теорема. Маршрут волновой системы, состоящий из блоков наибольших срабатываний, будет иметь наименьшее количество блоков.

Доказательство. Рассмотрим маршрут $\boldsymbol{M = M_0 \xrightarrow{\sigma_1} M_1 \xrightarrow{\sigma_2} \cdots \xrightarrow{\sigma_s} M_s = M'}$ от некоторой начальной маркировки $\boldsymbol{M_0}$ к конечной $\boldsymbol{M_s}$, где $\boldsymbol{\sigma = [t_1\, t_2 \cdots t_n]}$ – последовательность одновременных срабатываний переходов – блок маршрута $\boldsymbol{\mu}$. Предположим, что этот маршрут имеет наименьшее количество блоков. Будем говорить, что $\boldsymbol{\sigma}$ *укомплектован*, если нет других переходов, независимых с $\boldsymbol{t_1}, \dots, \boldsymbol{t_n}$. Пусть $\boldsymbol{\sigma_1}$ – не укомплектован. Тогда существует переход $\boldsymbol{t}$, независимый со всеми $\boldsymbol{t_i} \in \boldsymbol{\sigma_1}$, $\boldsymbol{1 \le i \le n}$, и для этого перехода существует срабатывание $\boldsymbol{M_0} \xrightarrow{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{\bar{M}_0}$ (рисунок 3).

$$
\begin{tikzcd}
M_0 \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "t"'] & M_1 \\
\bar{M}_0 &
\end{tikzcd}
$$

Рис. 3. *Срабатывание* $\boldsymbol{M_0 \xrightarrow{t} \bar{M}_0}$

Существует маркировка $\boldsymbol{\bar{M}_1}$, к которой ведет блок $\boldsymbol{\sigma_1}$ вместе с переходом $\boldsymbol{t}$. Эта маркировка получается при последовательном срабатывании сначала блока $\boldsymbol{\sigma_1}$, а затем перехода $\boldsymbol{t}$, или при срабатывании сначала $\boldsymbol{t}$, а затем блока $\boldsymbol{\sigma_1}$. Если $\boldsymbol{t \notin \sigma_2}$, то существует маркировка $\boldsymbol{\bar{M}_2}$, обладающая аналогичными свойствами. Таким образом, мы получаем диаграмму, изображенную на рисунке 4.

$$
\begin{tikzcd}
M_0 \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "\bar{\sigma}_1"] & M_1 \arrow[r, "\sigma_2"] \arrow[d, "t"] & \cdots \arrow[r, "\sigma_{s-1}"] & M_{s-1} \arrow[r, "\sigma_s"] \arrow[d, "t"] & M_s \\
\bar{M}_0 \arrow[r, "\sigma_1"] & \bar{M}_1 \arrow[r, "\sigma_2"] & \cdots \arrow[r, "\sigma_{s-1}"] & \bar{M}_{s-1} \arrow[ur, "\bar{\sigma}_s"] &
\end{tikzcd}
$$

Рис. 4. Диаграмма маршрута $\mathbf{M_0 \to M_s}$

Рассматривая альтернативный маршрут от $\boldsymbol{M_0}$ к $\boldsymbol{M_s}$, состоящий из блоков $\boldsymbol{\bar{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots}$, необходимо учесть, что согласно лемме 3 в нём обязательно должен содержаться переход $\boldsymbol{t}$. Пусть $\boldsymbol{s}$ – наименьший индекс, при котором $\boldsymbol{t \in \sigma_s}$. Тогда будет иметь место последовательность переходов $\boldsymbol{\sigma_s \backslash \{t\} = \bar{\sigma}_s : \bar{M}_{s-1} \to M_s}$. В результате получим маршрут, состоящий из последовательности блоков $\boldsymbol{\bar{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{s-1}, \bar{\sigma}_s}$, в которой первый элемент полностью укомплектован и содержит на один переход больше. При этом общее количество блоков маршрута осталось прежним. ■

Эта теорема дает метод построения маршрута, состоящего из минимального количества блоков. Рассмотрим, например, сеть, изображенную на рисунке 1 (а). На момент начальной маркировки сети $\boldsymbol{n = 3}$, то есть в каждом начальном месте находится по 3 фишки. Построим маршрут $\boldsymbol{M_0 \to M'}$ из начальной маркировки сети в конечную (рисунок 1 (б)). Последовательность блоков наибольших срабатываний будет иметь вид $\boldsymbol{\mu = [t_1 t_2][t_1 t_2 t_3 t_4]^{n-1}[t_3 t_4] = [t_1 t_2][t_1 t_2 t_3 t_4][t_1 t_2 t_3 t_4][t_3 t_4]}$.

Заключение

В статье [2] для нахождения маршрута, состоящего из минимального числа блоков и содержащегося в асинхронной системе, использовалось приведение трассы к нормальной формы Фоаты. Это позволило разработать метод вычисления минимального времени обработки входных данных для конвейера и псевдо-конвейера. Волновая система не является асинхронной системой, поэтому для расчета маршрута, состоящего из минимального числа блоков, мы разработали другие методы. Легко доказать, что волновая система будет дистрибутивным асинхронным автоматом в смысле [4], если определить состояния как маркировки, а переходы, допускающие срабатывания из одной маркировки, как независимые. Это дает шанс получить результаты для ацикличных дистрибутивных асинхронных автоматов, аналогичные результатам, полученных для волновых систем.

Данная работа была выполнена в рамках программы стратегического развития государственных образовательных учреждений высшего профессионального образования, грант № 2011-ПР-054.

ЛИТЕРАТУРА

1. Котов, В. Е. Сети Петри / В. Е. Котов. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 160 с.
2. Кудряшова, Е. С. Временные оценки и гомоморфизмы асинхронных систем / Е. С. Кудряшова, А. А. Хусаинов // Наука и образование: Электронное научно-техническое издание. №1, 2014. – С. 134-149.
3. Кудряшова, Е. С. Моделирование конвейерных и волновых вычислений / Е. С. Кудряшова, Н. Н. Михайлова, А. А. Хусаинов // Интернет-журнал «Науковедение», 2014 №1 (20) [Электронный ресурс] - М.: Науковедение, 2014. Режим доступа: http://naukovedenie.ru/PDF/56TVN114.pdf
4. Кудряшова, Е. С. Обобщенные асинхронные системы / Е. С. Кудряшова, А. А. Хусаинов // Моделирование и анализ информационных систем, № 4 (19), 2012. – С.78-86.
5. Питерсон, Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем / Дж. Питерсон ; пер. с англ. М. В. Горбатовой, В. Л. Торхова, В. Н. Четверикова ; под ред. В. А. Горбатова. – М. : Мир, 1984. – 264 с.

Ahmet Khusainov
Komsomolsk-on-Amur state technical University
Russia, Komsomolsk-on-Amur
E-Mail: kmopvm@knastu.ru

Catherine Kudryashova
Komsomolsk-on-Amur state technical University
Russia, Komsomolsk-on-Amur
E-Mail: ekatt@inbox.ru

Mathematical model for wave calculation

Abstract. The paper discusses issues related to the wave systems. The definition of the wave system. It has been established that, in any path connecting the initial and final place the chips permanently. It is proved that the wave system has no dead ends. It is shown that for each state there is a wave of the greatest set of transitions that can be simultaneously applied to this state. Developed and validated a method for constructing the route wave system having a minimum number of blocks.

Keywords: conveyor; wave system; synchronization graph; Petri net.

REFERENCES

1. Kotov, V. E. Seti Petri / V. E. Kotov. – M. : Nauka. Glavnaja redakcija fiziko-matematicheskoj literatury, 1984. – 160 s.
2. Kudrjashova, E. S. Vremennye ocenki i gomomorfizmy asinhronnyh sistem / E. S. Kudrjashova, A. A. Husainov // Nauka i obrazovanie: Jelektronnoe nauchno-tehnicheskoe izdanie. №1, 2014. – S. 134-149.
3. Kudrjashova, E. S. Modelirovanie konvejernyh i volnovyh vychislenij / E. S. Kudrjashova, N. N. Mihajlova, A. A. Husainov // Internet-zhurnal «Naukovedenie», 2014 №1 (20) [Jelektronnyj resurs] - M.: Naukovedenie, 2014. Rezhim dostupa: http://naukovedenie.ru/PDF/56TVN114.pdf
4. Kudrjashova, E. S. Obobshhennye asinhronnye sistemy / E. S. Kudrjashova, A. A. Husainov // Modelirovanie i analiz informacionnyh sistem, № 4 (19), 2012. – S.78-86.
5. Piterson, Dzh. Teorija setej Petri i modelirovanie sistem / Dzh. Piterson ; per. s angl. M. V. Gorbatovoj, V. L. Torhova, V. N. Chetverikova ; pod red. V. A. Gorbatova. – M. : Mir, 1984. – 264 s.