УДК 517.946

Керефова Ира Хазизовна
ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский Государственный аграрный университет им. В.М. Кокова»
Россия, Нальчик
Доцент
Кандидат физико-математических наук
E-mail: aziza67@rambler.ru

О существовании и единственности решения для нагруженного уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача для нагруженного уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами. Доказывается существование и единственность решения задачи в двухслойной среде с условиями сопряжения на границе.

Ключевые слова: нагруженное; теплопроводность; регулярное решение; класс решений; сопряжения; краевая задача; функция Грина; уравнение Вольтерра; интегральное представление.

Рассмотрим нагруженное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = k_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - q_i(x,t) u_i\left(x_0^i, t\right) + f_i(x,t), i = 1,2, \qquad (1)$$

В области

$$\Omega = \{(x,t): 0 < t < h_2, 0 < t < T\}, \left({x_0}^i, t\right)\epsilon\Omega_i, x_0^1 \epsilon (0, h_1), x_0^2 \epsilon (h_1, h_2).$$

Для уравнения (1) рассмотрим следующую задачу:

Найти регулярное в Ω_iрешение $u_i(x,t)$уравнение

(1) из класса $C(\Omega/\{x = h_1\}) \cap C^1(\Omega_1 \cup x = 0 \cup x = h_1) \cap C^1(\Omega_2 \cup x = h_1 \cup x = h_2)$ и удовлетворяющее условиям второй краевой задачи:

$$u_i(x,0) = u_{i_0}(x), 0 \leq x \leq h_2 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u_2(h_2,t)}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

и условиям сопряжения

$$k_1 \frac{\partial u_1(-h_1,t)}{\partial x} = k_2 \frac{\partial u_2(+h_1,t)}{\partial x} = u_2(+h_1,t) - u_1(-h_1,t), \qquad (4)$$

где $q_i(x,t), f_i(x,t)$- заданные достаточно гладкие функции.

Справедлива следующая

Теорема. Решение задачи (1)-(4) в классе функций

$$C(\Omega/\{x = h_1\}) \cap C^1(\Omega_1 \cup x = 0 \cup x = h_1) \cap C^1(\Omega_2 \cup x = h_1 \cup x = h_2)$$

Существует и единственно.

Действительно, используя функцию Грина $G_1(x,t;\xi,\eta)$ второй краевой задачи для уравнения теплопроводности, получим интегральное представление решения $u_1(x,t)$ задачи:

$$u_1(x,0) = u_{1_0}(x),$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(0,t) = 0 k_1 \frac{\partial u_1(-h_1,t)}{\partial x} = u_2(+h_1,t) - u_1(-h_1,t)$$

для уравнения

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - q_1(x,t) u_1(x_0^1,t) + f_1(x,t)$$

в виде равенства

$$u_1(x,t) = \int_0^{h_1} u_{1_0}(\xi) G_1(x,t;\xi,0) d\xi - \int_0^t u_{1_\xi}(-h_1,\eta) G_1\left(x,t;-h_{1,}\eta\right) d\eta +$$

$$+ \int_0^t \int_0^{h_1} [-q_1(\xi,\eta) u_1(x_0^1,\eta) + f_1(\xi,\eta)] \cdot G_1(x,t;\xi,\eta) d\xi d\eta,$$

а в силу условия, заданного на границе x=h_1в области Ω_1, находим:

$$u_1(x,t) = \int_0^{h_1} u_{1_0}(\xi) \cdot G_1(x,t;\xi,0) d\xi - \int_0^t \frac{1}{k_1} [u_2(+h_1,\eta) - u_1(-h_1,\eta)] \cdot \cdot G_1\left(x,t;-h_{1,}\eta\right) d\eta + \int_0^t u_1(x_0^1,\eta) d\eta \int_0^{h_1} q_1(\xi,\eta) \cdot G_1(x,t;\xi,\eta) d\xi + \int_0^t \int_0^{h_1} f_1(\xi,\eta) \cdot G_1(x,t;\xi,\eta) d\xi d\eta. \qquad (5)$$

Решение задачи

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - q_2(x,t)u_2(x_0^2,t) + f_2(x,t)$$

$$u_2(x,0) = u_{2_0}(x),$$

$$k_2 \cdot \frac{\partial u_2(+h_1,t)}{\partial x} = u_2(+h_1 t) - u_1(-h_1,t), \frac{\partial u_2(h_2,t)}{\partial x} = 0$$

в области $\Omega_2 = \{(x,t): h_1 < x < h_2, 0 < t < T\}$ представимо в виде следующего интегрального равенства

$$u_2(x,t) = \int_0^t u_{2_\xi}(+h_1,t)G_2(x,t;+h_1,\eta)d\eta + \int_{h_1}^{h_2} u_{2_0}(\xi)\cdot G_2(x,t;\xi,0)d\xi +$$

$$+\int_0^t u_2(x_0^2,\eta)d\eta \int_{h_1}^{h_2} -q_2(\xi,\eta)\cdot G_2(x,t;\xi,\eta)d\xi + \int_0^t \int_{h_1}^{h_2} f_2(\xi,\eta)G_2(x,t;\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

где

$$G_2(x,t;\xi,\eta) = [4\pi k_2(t-\eta)]^{-1/2}\cdot \sum_{h=-\infty}^{\infty}\left\{exp\left[\frac{(x-\xi+2n(h_2-h_1))^2}{4\sqrt{k_2}\cdot(t-\eta)}\right] + \right.$$

$$\left. +exp\left[-\frac{(x-\xi+2n(h_2-h_1))^2}{4\sqrt{k_2}(t-\eta)}\right]\right\}$$

Полученное представление решения $U_2(x,t)$ в области Ω_2 в силу условия на x$=h_1$ можно переписать в виде

$$u_2(x,t) = \int_0^t \frac{1}{k_2}[u_2(+h_1,t) - u_1(-h_1,t)]\cdot G_2(x,t;h_1,\eta)d\eta + \int_{h_1}^{h_2} u_{2_0}(\xi)G_2(x,t;\xi,0)d\xi +$$

$$\int_0^t u_2(x_0^2,\eta)d\eta \int_{h_1}^{h_2} -q_2(\xi,\eta)\cdot G_2(x,t;\xi,\eta)d\xi + \int_0^t \int_{h_1}^{h_2} f_2(\xi,\eta)G_2(x,t;\xi,\eta)d\xi d\eta. \quad (6)$$

В представлении (5) перейдем к пределу при $x \to x_0^1 \in (0,h_1)$, а в (6) к пределу $x \to x_0^2 \in (h_1,h_2)$.Получим в итоге интегральные уравнения Вольтерра, что позволяет получить единственные представления $u_1(x_0^1,t)$ и $u_2(x_0^1,t)$ через разность $u_2(x,t)$ и $u_1(x,t)$ на прямой$x = h_1$: $u_2(+h_1,t) - u_1(-h_1,t)$.

Далее в представлении (6) перейдем к пределу при $x \to h_1 + 0$, а в представлении (5) при $x \to h_1 - 0$, а затем вычитая полученные равенства получается интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно разности $u_2\left(+h_{1,}t\right) - u_1(-h_1,t)$.

Таким образом разность $u_2(+h_1,t) - u_1(-h_1,t)$ определяется единственным образом, что доказывает справедливость теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Углов А.А., Смуров И.Ю., Лашин А.М. «Моделирование нестационарного движения фазовых границ при воздействии потоков энергии на материалы». ТВТ, т.27, №1, «Наука», 1989, с.87-92.
2. Карташов Э.М. Метод функций Грина при решении краевых задач уравнения теплопроводности в нецилиндрических областях. – Прикл. Матем. и мех. (ZAMM, ГДР), 1978, №58, с. 199-208.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. «Высшая школа», М., 1995, с.301.
4. Керефов А.А., Шхануков М.Х., Керефова И.Х. «Об одной математической модели нагрева системы «покрытие-основа». Вестник КБГУ, 1996, с.63-67.
5. Керефова И.Х. Об единственности решения одной задачи для параболического уравнения с разрывными коэффициентами //Сб. научных трудов. Киев, 2000.

Kerefova Ira Khazizovna
Kabardino-Balkaria State Agrarian University V.M. Kokova
Russia, Nalchik
E-mail: aziza67@rambler.ru

On the existence and uniqueness of solutions for a loaded heat equation with discontinuous coefficients

Abstract. The article discusses the boundary value problem for a loaded parabolic equations with discontinuous coefficients. The existence and uniqueness of the solution of the problem in the two-layer medium with conjugation conditions at the border.

Keywords: loaded; thermal conductivity; regular solution; class of solutions; interface; boundary value problem; Green's function; the equation of Volterra integral representation.

REFERENCES

1. Points AA, Smurov IY, Lachine AM "Modeling of unsteady motion of phase boundaries when exposed to the energy flows of materials." TVT, t.27, №1, «Science», 1989, s.87-92.
2. EM Kartashov Green's function method for solving boundary value problems of the heat equation in non-cylindrical domains. - J. Appl. Mat. and fur. (ZAMM, GDR), 1978, №58, p. 199-208.
3. Nahushev AM Equations of mathematical biology. "High School", Moscow, 1995, p.301.
4. Kerefov AA, Shkhanukov MH, IH Kerefova "On a mathematical model of the heating system" coating-base. "Bulletin KBSU, 1996, s.63-67.
5. Kerefova IH Uniqueness of the solution of a problem for a parabolic equation with discontinuous coefficients // Proc. scientific papers. Kyiv, 2000.