УДК 336.1

Белолипцев Илья Игоревич
ФГБОУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
Уфимский филиал
Россия, Уфа
Преподаватель кафедры математики и информатики
E-Mail: beloliptsev.ilya@yandex.ru

Фархиева Светлана Анатольевна
ФГБОУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
Уфимский филиал
Россия, Уфа
Доцент кафедры математики и информатики
Кандидат технических наук
E-Mail: ok-xi@yandex.ru

Предсказание финансовых временных рядов на основе индекса фрактальности

Аннотация. В работе предлагается подход к построению прогнозных нейросетевых моделей финансовых временных рядов. При формировании пространства признаков предлагается использовать фрактальные характеристики временного ряда. На реальных данных показано, что индекс фрактальности является надежным индикатором текущего состояния временного ряда, и его использование улучшает прогностические свойства модели.

Ключевые слова: индекс фрактальности; фрактальная размерность; временные ряды; прогнозирование; нейросеть.

Фрактальная размерность – это число, которое количественно описывает то, как объект заполняет пространство. Существует много способов расчета фрактальной размерности. Все они подразумевают подсчет объема или площади фрактальной формы в том пространстве, в котором эта форма находится.

Рассмотрим временной ряд, состоящий из цен закрытия некоторого финансового инструмента $\{C_t\}$. Если уровни ряда $\{C_t\}$ независимы, то на графике временного ряда будут отсутствовать ярко выраженные тренды и поведение C_t будет напоминать «белый шум». В этом случае величина фрактальной размерности D будет стремиться к величине топологической размерности плоскости, то есть $D \to 2$. Если же значения ряда C_t не являются независимыми, то величина D будет значительно меньше 2, и это говорит о том, что временной ряд обладает «памятью», т.е. на некоторых временных отрезках наблюдаются восходящие и нисходящие тренды, сменяющиеся периодами неопределенности (рисунок 1).

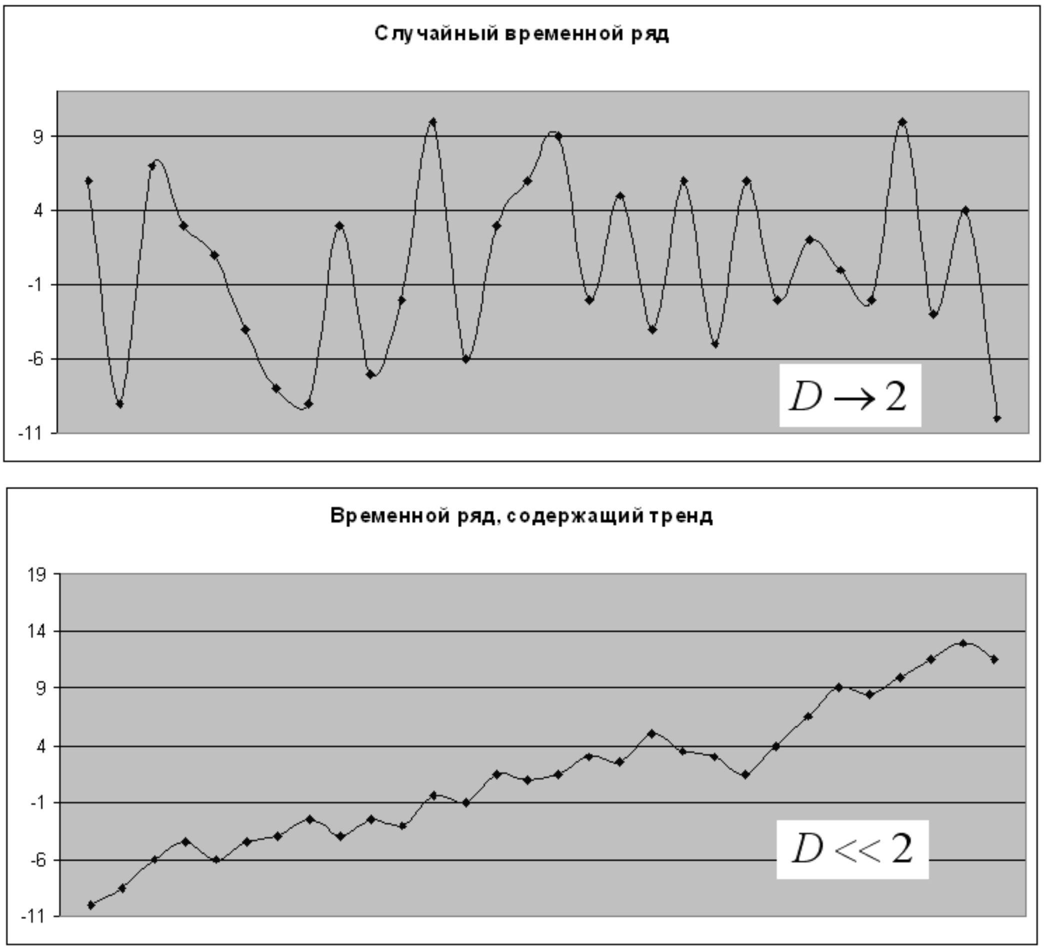

Рис. 1. *Пример случайного ряда и ряда, содержащего тренд*

Существует несколько способов определения фрактальной размерности временного ряда. Рассмотрим 2 из них:

1). Фрактальная размерность может быть найдена с помощью показателя Херста H:

$$D_H = 2 - H \tag{1}$$

$$H = \log(R/S)/\log(N/2), \tag{2}$$

где $R = \max\{C_t\} - \min\{C_t\}$, $i = \overline{1, N}$ размах отклонений C_t ; S - среднеквадратическое отклонение значений C_t.

Если для некоторого временного ряда $0{,}5 < H < 1$, то этот ряд является персистентным, или трендоустойчивым. Чем ближе значение H к единице, тем более коррелированны значения ряда $\{C_t\}$. Если для некоторого ряда $0{,}5 < H < 1$, то это означает, что ряд $\{C_t\}$ не является случайным, а содержит тренд, что дает основания предположить, что поведение этого ряда может быть спрогнозировано с достаточной точностью.

Недостатком этого метода является тот факт, что для получения приемлемой оценки показателя Херста необходимо иметь достаточно большое количество данных (несколько сотен значений временного ряда) [4], в противном случае полученные оценки D_H могут быть неточными. Кроме того, значения ряда $\{C_t\}$ должны быть распределены по нормальному закону, что выполняется далеко не всегда [3, 5].

Величина фрактальной размерности D_H является характеристикой всего ряда $\{C_t\}$ в целом, хотя на своем протяжении динамика временного ряда может многократно меняться: тренды меняют свое направление или переходят в фазу случайных колебаний и наоборот.

2). Для задач прогнозирования финансовых рядов более перспективным является способ, основанный на вычислении величины размерности минимального покрытия D_μ [1].

Размерность минимального покрытия определяется следующим образом: пусть временной ряд $\{C_t\}$ задан функцией $f(t)$ на отрезке $[a,b]$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на равные интервалы длиной $\delta = (b-a)/m$. Минимальная площадь покрытия графика функции $f(t)$ на отрезке $[a,b]$ будет равна сумме площадей прямоугольников с основанием δ и высотой, равной разности $A_i(\delta)$ между максимальным и минимальным значением функции $f(t)$ на каждом отрезке $[t_{i-1}, t_i]$.

Полную площадь минимального покрытия $S_\mu(\delta)$ можно найти как:

$$S_\mu(\delta) = V_f(\delta)\delta\,,\ V_f(\delta) = \sum_{i=1}^{m} A_i(\delta)\,, \tag{3}$$

где $V_f(\delta)$ - сумма амплитуд функции $f(t)$ на отрезке $[a,b]$. Очевидно, что $V_f(\delta)$ зависит от выбора величины δ. Чем меньше δ, тем точнее будет вычислена $V_f(\delta)$. При этом величина $V_f(\delta)$ при изменении δ будет меняться по степенному закону:

$$V_f(\delta) \approx \delta^{-\mu} \text{ при } \delta \to 0\,, \tag{4}$$

где $\mu = D_\mu - 1$. Иллюстрация зависимости $V_f(\delta)$ для временного ряда, содержащего 32 наблюдения, показана на рис. 2.

Величина D_μ получила название «размерность минимального покрытия», а индекс μ - индекс фрактальности.

Прологарифмировав (4), получим:

$$\ln V_f(\delta) = -\mu \ln \delta . \tag{5}$$

Для определения D_μ необходимо построить график зависимости $V_f(\delta)$ от δ в двойных логарифмических координатах и определить μ как тангенс угла наклона прямой к оси X, взятый с обратным знаком и затем вычислить D_μ из (5). Величина μ определяется методом наименьших квадратов (МНК).

а)

б)

в)

г)

Рис. 2. *Вычисление площади покрытия при различных значениях* δ *:*

а) при $\delta = 16$*, б) при* $\delta = 8$ *, в) при* $\delta = 4$ *, г) при* $\delta = 2$.

На рисунке 3 приведен пример расчета индекса фрактальности μ . Как видно из рисунка, коэффициент детерминации уравнения регрессии, аппроксимирующего зависимость $V_f(\delta)$ равен 0,96, что говорит о том, что индекс фрактальности μ =0,4544 определен достаточно точно.

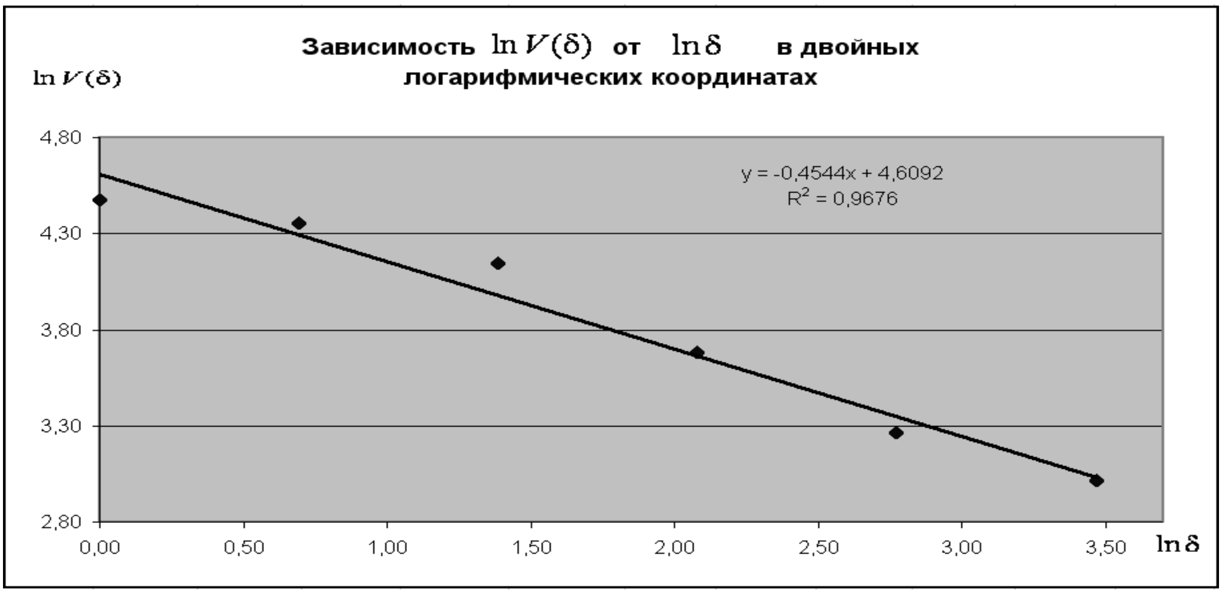

Рис. 3. *Аппроксимация зависимости* $V_f(\delta)$ *и определение индекса фрактальности*

Индекс фрактальности μ является *локальной фрактальной характеристикой* временного ряда. В [1] показано, что точность определения D_μ, намного выше, чем точность определения других фрактальных характеристик, таких как клеточная размерность D_c или размерность, вычисленная на основе показателя Херста. При этом данный метод не накладывает ограничений на закон распределения временных рядов $\{C_t\}$. В [1] также показано, что для получения достаточно точной оценки D_μ временной ряд $\{C_t\}$ должен содержать не менее 32 наблюдений. На практике финансовые временные ряды имеют гораздо более длинную историю. Это дает возможность рассматривать индекс фрактальности как функцию от времени $\mu(t)$, где каждое значение μ_t вычисляется на основе 32 предыдущих значений временного ряда $\{C_t\}$.

Рассмотрим ряд цен закрытия акций ОАО «Татнефть» за период с 1.06.2012 по 1.05.2014 года, содержащий 500 наблюдений. По изложенному выше алгоритму были вычислены значения индекса фрактальности $\mu(t)$ для всех $t \in [33;500]$. На рисунке 4 приведен *фрагмент* исходного ряда котировок $\{C_t\}$ и соответствующий ему график $\mu(t)$.

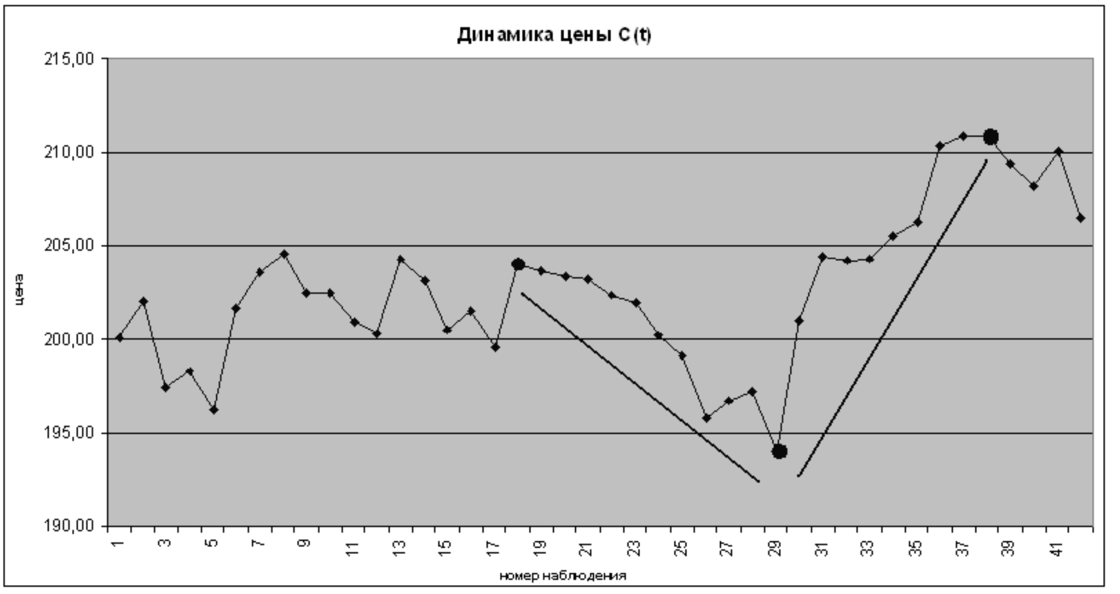

Рис. 4. *Иллюстрация зависимости индекса фрактальности от динамики цен*

Как видно из рисунка 4, между значениями C_t и μ_t наблюдается достаточно тесная связь, которая особенно заметна в те моменты, когда поведение ряда $\{C_t\}$ меняется от случайного к тренду или в момент смены направления тренда (на графике эти моменты отмечены жирным маркером). В те периоды времени, когда наблюдается восходящий либо нисходящий тренд величина индекса фрактальности резко снижается. И чем сильнее и продолжительнее тренд, тем меньше будет значение μ. И наоборот, в те моменты, когда тренд иссякает или меняет свое направление величина μ растет. Это свойство индекса фрактальности позволяет использовать его в качестве достаточно надежного фондового индикатора, характеризующего текущее состояние временного ряда. Можно надеяться на то, что мониторинг индекса фрактальности позволит вовремя определить момент разворота тренда и принять верное торговое решение.

Вопрос о принципиальной предсказуемости фондовых инструментов не решен до сих пор. Согласно теории эффективного рынка котировки фондовых инструментов являются случайными величинами, их динамика подобна броуновскому случайному процессу и поэтому получение сколько-нибудь точного прогноза невозможно. С другой стороны, в литературе приводятся многочисленные свидетельства того, что поведение биржевых котировок не случайно. В некоторых работах [2, 4], посвященных фрактальному анализу временных рядов, теория эффективного рынка подвергается обоснованному сомнению.

Традиционно, наиболее популярными инструментами для прогнозирования финансовых временных рядов, являются авторегрессионные модели и технический анализ. В данной работе делается попытка построения нейросетевой прогнозной модели. В пользу такого выбора есть несколько соображений:

- в отличие от традиционного технического анализа, в рамках которого используется ограниченный набор индикаторов, на вход нейросети может подаваться практически любая информацию, как количественная так и качественная;
- нейросети, в отличие от авторегрессионных моделей, не чувствительны к мультиколлинеарности факторов;
- являясь универсальным аппроксиматором, нейросеть способна в процессе обучения восстанавливать сложные *нелинейные зависимости*, скрытые в данных.

При предсказании финансовых временных рядов особое значение имеет формирование пространства признаков и предобработка данных для повышения качества обучения. В этом вопросе будем следовать рекомендациям авторов из [2].

Так как между последовательными значениями котировок C_t наблюдается сильная корреляция, в качестве входов нейросети выбирать сами значения C_t не стоит. Для улучшения качества обучения следует стремиться к статистической независимости входов [3]. Поэтому в качестве факторов будем использовать приращения $\Delta C_t = C_t - C_{t-1}$. Очевидно, что последовательные значения ΔC_t более независимы, чем C_t, и кроме того, они имеют меньшую амплитуду колебаний, чем исходные значения котировок. Также достаточно часто в качестве входов нейросети используются технические индикаторы, такие как скользящие средние, осцилляторы и стохастические линии.

По мнению авторов, повысить качество прогноза можно, включив в состав факторов фрактальные характеристики временного ряда, в частности *индекс фрактальности* μ, который является *локальной фрактальной характеристикой* временного ряда и характеризует его текущее состояние, а именно наличие или отсутствие тренда на данном участке.

На основе исходного ряда цен закрытия $\{C_t\}$ акций ОАО «Татнефть» сформируем базовый набор показателей, которые будут использованы в качестве входов нейросети.

Лаговые переменные:

$$X_1 = C_t - C_{t-1},\ X_2 = C_t - C_{t-2},\ X_3 = C_t - C_{t-3},\ X_4 = C_t - C_{t-4},\ X_5 = C_t - C_{t-5} \quad (6)$$

Приращения индекса фрактальности:

$$X_6 = \mu_t,\ X_7 = \mu_t - \mu_{t-1},\ X_8 = \mu_t - \mu_{t-2},\ X_9 = \mu_t - \mu_{t-3},\ X_{10} = \mu_t - \mu_{t-4},$$
$$X_{11} = \mu_t - \mu_{t-5} \quad (7)$$

Технические индикаторы:

$$X_{12} = MA_t = (C_t + C_{t-1} + ... + C_{t-n+1})/n,\ X_{13} = EMA_t = k \cdot C_t + (1-k) \cdot EMA_{t-1},$$

$$X_{14} = RSI_t = 100 - 100/(1 + AU / AD), \qquad (8)$$

где MA_t -простая скользящая средняя; EMA_t - экспоненциальная скользящая средняя; RSI_t - индекс относительной силы; n - интервал сглаживания ($n = 5$); $k = 2/(n+1)$.

Значения индекса фрактальности μ_t вычислялись на основе 32 предыдущих значений временного ряда $\{C_t\}$. В итоге была получена база данных, содержащая 14 факторов и 463 строки данных. Данные были разбиты на обучающую и тестовую выборку в соотношении 80:20. Таким образом в тестовое множество попало 94 примера.

Для повышения однородности и информативности данные были предварительно нормированы в интервал [0;1].

Важнейшим моментом на этапе подготовки данных является выбор моделируемой величины Y. В литературе рекомендуется моделировать не будущие значения курсов ($Y_t = C_{t+1}$) или их приращения ($Y_t = C_{t+1} - C_t$), а направление будущего движения цен [4]. Для построения эффективной торговой стратегии, такой выбор может быть наиболее удачным.

Целью данного исследование является проверка гипотезы о том, что включение в состав факторов индекса фрактальности временного ряда может улучшить прогнозные характеристики нейросетевой модели. Поэтому, для проведения сравнительного анализа были сформированы 4 системы показателей (СП), отличающиеся набором факторов и характером моделируемой величины Y. Для СП1 и СП2 в качестве моделируемой величины была выбрано бинарная переменная, принимающая только 2 возможных значения 0 или 1, соответствующие направлению движения цены ($Y_t = 1$ - рост; $Y_t = 0$ - падение курса). Для СП3 и СП4 в качестве прогнозируемой величины было выбрано значение индекса фрактальности μ на следующий день. В нейроэмуляторе Neuro Solutions была создана нейросеть типа многослойный персептрон с 3 скрытыми слоями нейронов и активационной функцией гиперболического тангенса. Сеть обучалась на 4 созданных системах показателей, после чего ей предъявлялись данные из тестового множества, не участвовавшие в обучении. Описание систем показателей и результаты тестирования нейросети приведены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты тестирования нейросети

№	Факторы	Моделируемая величина	Количество верных прогнозов, в % к общему числу тестовых примеров
СП 1	$X_1,..., X_5, X_{12},..., X_{14}$	$Y_t \in \{1,0\}$	59%
СП 2	$X_1,..., X_{14}$	$Y_t \in \{1,0\}$	42%
СП 3	$X_1,..., X_5, X_{12},..., X_{14}$	$Y_t = \mu_{t+1}$	68%
СП 4	$X_1,..., X_{14}$	$Y_t = \mu_{t+1}$	53%

Как видно из таблицы, для систем показателей, в состав которых были включены фрактальные характеристики (СП 2 и СП 4), результаты тестирования значительно лучше, чем у СП 1 и СП 3, в которые были включены только лаговые переменные и технические индикаторы.

Наилучший результат был достигнут для СП 3, где в качестве моделируемой (прогнозируемой) величины использовалось будущее значение индекса фрактальности. Зная прогнозное значение μ_{t+1} можно прогнозировать будущую динамику временного ряда, т.е. ответить на важнейшие для трейдера вопросы:

- в каком состоянии находится рынок в данный момент?
- что определяет движение цен: случайные колебания или устойчивый тренд?
- в какой момент произойдет разворот тренда?

Проведенный вычислительный эксперимент показал, что использование фрактальных характеристик в задачах прогнозирования финансовых рядов может существенно повысить точность прогноза, а значит и доходы от биржевой торговли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубовиков М.М., Крянев А.В., Старченко Н.В. Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов. // Вестник РУДН, Т3, №1, 2004, С. 81-95.,
2. Ежов А.А., Шумский С.А. Нейрокомпьютинг и его применение в экономике и бизнесе: Учебник / Ред. проф. В. В. Харитонов. – М.: Изд. Московского инженерно-физического института, 1998. - 224 с.
3. Использование методов фрактальной теории при ранжировании объектов налогового контроля / Горбатков С. А., Белолипцев И. И., Фархиева С. А. // Нейроинформатика: сб. науч. тр. XV всеросс. конф. М.:МИФИ, 2013, Т. 3. С. 184-192.
4. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка: Монография. – М.: Издательство «Мир», 2000. - 333 с.
5. Построение оптимального плана выездных проверок на основе гибридной нейросетевой модели налогового контроля / И. И. Белолипцев // Управление экономическими системами: электронный научный журнал. 2013. №4 (52). URL: http://www.uecs.ru/uecs-52-522013/item/2143-2013-05-17-07-42-26 (дата обращения 22.04.2014).

Ilya Beloliptsev
Financial University under the Government of Russian Federation
Ufa branch
Russia, Ufa
E-Mail: beloliptsev.ilya@yandex.ru

Svetlana Farkhieva
Financial University under the Government of Russian Federation
Ufa branch
Russia, Ufa
E-Mail: ok-xi@yandex.ru

Forecasting financial time series based on the fractal index

Abstract. The paper proposes an approach to the construction of predictive neural network models of financial time series. When forming the feature space is proposed to use the fractal characteristics of time series. On real data shows that the fractal index is a reliable indicator of the current state of the time series, and its use improves the predictive properties of the model.

Keywords: Index fractality; fractal dimension; time series; forecasting; neural network.

REFERENCES

1. Dubovikov M.M., Krjanev A.V., Starchenko N.V. Razmernost' minimal'nogo pokrytija i lokal'nyj analiz fraktal'nyh vremennyh rjadov. // Vestnik RUDN, T3, №1, 2004, S. 81-95.,
2. Ezhov A.A., Shumskij S.A. Nejrokomp'juting i ego primenenie v jekonomike i biznese: Uchebnik / Red. prof. V. V. Haritonov. – M.: Izd. Moskovskogo inzhenerno-fizicheskogo instituta, 1998. - 224 s.
3. Ispol'zovanie metodov fraktal'noj teorii pri ranzhirovanii ob#ektov nalogovogo kontrolja / Gorbatkov S. A., Belolipcev I. I., Farhieva S. A. // Nejroinformatika: sb. nauch. tr. XV vseross. konf. M.:MIFI, 2013, T. 3. S. 184-192.
4. Peters Je. Haos i porjadok na rynkah kapitala. Novyj analiticheskij vzgljad na cikly, ceny i izmenchivost' rynka: Monografija. – M.: Izdatel'stvo «Mir», 2000. - 333 c.
5. Postroenie optimal'nogo plana vyezdnyh proverok na osnove gibridnoj nejrosetevoj modeli nalogovogo kontrolja / I. I. Belolipcev // Upravlenie jekonomicheskimi sistemami: jelektronnyj nauchnyj zhurnal. 2013. №4 (52). URL: http://www.uecs.ru/uecs-52-522013/item/2143-2013-05-17-07-42-26 (data obrashhenija 22.04.2014).