

Грылева Ирина Валентиновна

ФГБОУ ВПО «Псковский государственный университет»

Россия, Псков

Доцент кафедры экономики и управления на предприятии

Заместитель декана факультета менеджмента по научной работе

Кандидат экономических наук, доцент

E-Mail: irina.gryleva@gmail.com

Условия применения статических детерминированных и вероятностных математических моделей управления запасами

Аннотация. В статье рассматриваются условия применения некоторых статических детерминированных и статических вероятностных математических моделей управления материально-производственными запасами промышленных предприятий. Обоснованное применение математических моделей к управлению материально-производственными запасами способствует снижению общих издержек, связанных с созданием, содержанием и дефицитом запасов, и, как следствие, повышению рентабельности производства. В статье обосновывается необходимость расчета размера партии, закупаемой перед увеличением закупочных цен на материалы для некоторых видов запасов. Предложена многономенклатурная математическая модель управления запасами в случае доставки из одного региона и одним видом транспорта нескольких номенклатурных позиций запасов. Результаты исследования расширяют знания об условиях применения некоторых математических моделей управления материально-производственными запасами.

Ключевые слова: многопродуктовая статическая детерминированная модель управления запасами; статическая вероятностная модель управления запасами; учет переменной стоимости запасаемой продукции в статической детерминированной модели управления запасами; ABC-анализ; разработка системы управления запасами.

Разработку системы управления запасами имеет смысл начать с разделения запасов на группы управления. Разделение необходимо, поскольку номенклатурные позиции запасов, как правило, серьезно различаются по уровню требований к условиям хранения, по характеру использования в производственном процессе, по поставщикам, по стоимости и многим другим параметрам. Прежде всего, номенклатурные позиции материально-производственных запасов (МПЗ) разделяются на группы по принципу общего поставщика. Затем, в группе каждого поставщика выделяются подгруппы управления при помощи метода ABC – анализа.

В классическом ABC – анализе разделение запасов на группы осуществляется в зависимости от их стоимости [3]. В предлагаемой методике разделение осуществляется в зависимости от их доли в материальной себестоимости готовой продукции. Помимо доли в себестоимости продукции необходимо учесть дополнительные факторы, такие как, доступность используемого материала, возможность его замены, особые требования к условиям хранения, срок хранения и другие. Номенклатурные позиции с небольшим сроком хранения и особыми требованиями к условиям хранения должны быть отнесены в группу А, даже если они не занимают подавляющей доли в себестоимости готовой продукции.

Для всех запасов групп А и В применяется система управления с непрерывной проверкой их фактического уровня.

Для МПЗ, входящих в группу А выгодно использовать систему работы «под заказ», то есть, номенклатурные позиции запасов этой группы закупаются только по мере появления потребительских заказов на продукцию, в которой данные позиции используются. Применение такой системы оправданно за исключением случаев ожидаемого существенного удорожания МПЗ группы А. В случае, когда подобное удорожание ожидается можно использовать модифицированную для случая скачкообразного увеличения стоимости запасов статическую детерминированную модель [1].

Рассмотрим ситуацию, когда в ближайшем будущем прогнозируется существенное резкое увеличение стоимости запасаемых материалов и стоимости доставки [1]. В этом случае предприятию выгодно перед увеличением цены сделать дополнительный запас материалов. Необходимо определить его оптимальный с точки зрения минимизации издержек управления запасами в плановом периоде размер.

Первая составляющая общих издержек создания и содержания запаса за весь плановый период - это издержки, связанные со сделанным перед увеличением цены дополнительным запасом. Эти издержки будут равны:

$$ИО_1 = C_1 \cdot Q_1 + P_1 + I \cdot C_1 \cdot \frac{Q_1^2}{2 \cdot D}, \text{ где}$$

Q_1 – размер запаса материала определенного вида, который необходимо сделать перед увеличением цены на него;

C_1 – цена единицы запасаемого материала до ее скачкообразного увеличения;

P_1 – стоимость доставки партии запасаемого материала до ее увеличения;

I – коэффициент, показывающий, сколько рублей издержек хранения приходится на каждый рубль, вложенный в запас материала, в единицу времени;

D – спрос на материал в единицу времени.

Вторая составляющая общих издержек управления запасами за плановый период - издержки на создание и содержание запаса материала, закупаемого после увеличения цены на него. Эти издержки равны:

$$ИО_2 = N \cdot C_2 \cdot Q_2 + N \cdot P_2 + N \cdot I \cdot C_2 \cdot \frac{Q_2^2}{2 \cdot D}, \text{ где } Q_2 - \text{ размер партий, которыми}$$

будет осуществляться пополнение запаса после того, как будет израсходован материал, закупленный перед увеличением цены, C_2 – новая цена единицы запасаемого материала, P_2 – новая стоимость доставки, N – число поставок партий размера Q_2 . Коэффициент пропорциональности издержек I предполагается неизменным.

Продолжительность планового периода равна T . Плановый период состоит из двух частей. В первой части планового периода происходит расходование сделанного до скачкообразного увеличения цены запаса материала, продолжительность первой части планового периода составляет Q_1/D . Во второй части планового периода осуществляются поставки партиями размера Q_2 через одинаковые промежутки времени, равные T_u , продолжительность второй части планового периода – $(T - Q_1/D)$. Число поставок N приближенно равно отношению продолжительности второй части планового периода к T_u . С учетом того, что $T_u = Q_2/D$, $N \approx (T \cdot D - Q_1)/Q_2$.

Общие издержки создания и содержания запаса в плановом периоде T равны:

$$\begin{aligned} ИО &= ИО_1 + ИО_2 = \\ &= C_1 \cdot Q_1 + P_1 + I \cdot C_1 \cdot \frac{Q_1^2}{2 \cdot D} + C_2 \cdot (T \cdot D - Q_1) + P_2 \cdot \frac{T \cdot D - Q_1}{Q_2} + \\ &+ \frac{I \cdot C_2 \cdot Q_2 \cdot (T \cdot D - Q_1)}{2 \cdot D}. \end{aligned}$$

Размер партии поставки на пополнение запаса во второй части планового периода Q_2 рассчитывается по формуле (1): $Q_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot P_2}{I \cdot C_2}}$.

Формула общих издержек управления запасами в плановом периоде T примет вид:

$$\begin{aligned} ИО &= C_1 \cdot Q_1 + P_1 + I \cdot C_1 \cdot \frac{Q_1^2}{2 \cdot D} + C_2 \cdot (T \cdot D - Q_1) + \\ &+ 2 \cdot \frac{(T \cdot D - Q_1) \cdot \sqrt{I \cdot C_2 \cdot P_2}}{\sqrt{2 \cdot D}}. \end{aligned}$$

При оптимальном размере партии запасаемого материала, приобретаемой перед прогнозируемым скачкообразным увеличением цены ($Q_1=Q_1^*$) $\frac{d}{dQ_1} ИО = 0$.

$$\frac{d}{dQ_1} ИО = C_1 + \frac{I \cdot C_1 \cdot Q_1}{D} - C_2 - 2 \cdot \sqrt{\frac{I \cdot C_2 \cdot P_2}{2 \cdot D}}.$$

Следовательно, оптимальный объем материалов, который необходимо запастись при прогнозировании резкого увеличения их стоимости можно определить по формуле:

$$Q^*_1 = \frac{D \cdot C_2}{I \cdot C_1} + \frac{\sqrt{2 \cdot D \cdot C_2 \cdot P_2}}{C_1 \cdot \sqrt{I}} - \frac{D}{I}. \quad (1)$$

Применение формулы (1) позволяет предприятию избежать финансовых потерь от прогнозируемого скачкообразного увеличения стоимости используемых им МПЗ группы А.

Материалы группы В, используемые только в продукции, объем производства которой планируется полностью на основании заранее заключаемых договоров, относятся к подгруппе детерминированного спроса. Остальные запасы группы В относятся к подгруппе вероятностной интенсивности расходования.

При разработке системы управления запасами группы В подгруппы детерминированной интенсивности расходования применяется следующие математические модели: в случае если от одного поставщика доставляется один вид МПЗ, используется однопродуктовая статическая детерминированная модель, если же от одного поставщика доставляются несколько видов МПЗ – многопродуктовая [5].

Стандартная статическая детерминированная модель управления запасами [3] предполагает пополнение запасаемого материала партиями одинакового размера через равные промежутки времени, каждая следующая партия поступает на предприятие только после того, как израсходована предыдущая. Интенсивность расходования запасаемого материала (спрос на запасаемый материал) является заранее известной постоянной величиной. Оптимальный с точки зрения минимизации издержек размер партии на пополнение запаса определяется с помощью формулы:

$$Q^* = \sqrt{2 \cdot D \cdot \frac{P}{I \cdot C}}, \quad (2)$$

где D – спрос на запасаемый материал в единицу времени, P – затраты на доставку партии запаса, I - коэффициент, показывающий, сколько рублей издержек хранения приходится на каждый рубль, вложенный в запас материала, в единицу времени, вложенного в запасы; C – стоимость единицы запасаемого материала.

Время между поступлениями партий на пополнение запаса (длина цикла) равно $T_{ц} = Q/D$. При необходимости в модель вводятся дополнительные условия и ограничения.

В случае, если от одного поставщика доставляется несколько номенклатурных позиций МПЗ группы В подгруппы детерминированного спроса, используется многопродуктовая статическая детерминированная модель [3].

Предполагается, что m номенклатурных позиций запасов доставляются одним транспортом, от одного поставщика. Эти виды запасов будут пополняться с одинаковой периодичностью $T_{ц}$ и размер партии пополнения по каждой позиции будет одинаков в каждой поставке (Q_i $i=1, 2, \dots, m$). Для каждой позиции известны:

I_i – коэффициент, показывающий, сколько рублей издержек хранения приходится на каждый рубль, вложенный в запас i-й позиции материала, в единицу времени;

C_i – цена i го вида материала;

D_i – спрос на материал i-го вида в единицу времени;

P – стоимость доставки всей партии материалов от поставщика;

T – продолжительность планового периода.

Необходимо найти такие периодичность поставок $T_{ц}$ и размер партии каждого вида материалов Q_i , при которых суммарные издержки создания и содержания запасов будут минимальны.

Издержки по созданию запаса в течение планового периода будут равны:

$$ИС_1 = N \cdot \sum_{i=1}^m Q_i \cdot C_i + N \cdot P,$$

где N – количество поставок материалов в плановом периоде.

Поскольку поставки осуществляются через равные промежутки времени, периодичность поставок равна:

$$T_{ц} = \frac{T}{N} \tag{3}$$

Размер партии каждого вида материала, необходимый на период $T_{ц}$ равен:

$$Q_i = D_i \cdot T_{ц} = D_i \cdot \frac{T}{N} \tag{4}$$

Отсюда издержки создания запаса материалов в течение планового периода равны:

$$ИС_1 = T \cdot \sum_{i=1}^m D_i \cdot C_i + N \cdot P.$$

Поскольку запас расходуется равномерно в течение цикла, издержки содержания запаса материалов равны за плановый период:

$$ИС_2 = N \cdot \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \cdot I_i \cdot Q_i \cdot C_i \cdot T_{ц} = \frac{1}{2} \cdot \frac{T^2}{N} \cdot \sum_{i=1}^m I_i \cdot D_i \cdot C_i.$$

Общие издержки, связанные с созданием и содержанием запасов в течение планового периода равны:

$$ИО = ИС_1 + ИС_2 = T \cdot \sum_{i=1}^m D_i \cdot C_i + N \cdot P + \frac{1}{2} \cdot \frac{T^2}{N} \cdot \sum_{i=1}^m I_i \cdot D_i \cdot C_i.$$

Необходимо найти такое количество поставок $N_{опт}$, при котором общие издержки ИО в течение планового периода будут минимальны. Для этого должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} \frac{d}{dN} ИО = 0 \\ \frac{d^2}{dN^2} ИО > 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dN} ИО = P - \frac{1}{2} \cdot \frac{T^2}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^m I_i \cdot D_i \cdot C_i.$$

$$\frac{d^2}{dN^2} ИО = \frac{T^2}{N^3} \cdot \sum_{i=1}^m I_i \cdot D_i \cdot C_i.$$

$$\text{Отсюда, } N_{opt} = \frac{T \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m I_i \cdot D_i \cdot C_i}}{\sqrt{2 \cdot P}} \quad (5)$$

После того как найдено оптимальное количество поставок, можно найти периодичность поставок от данного поставщика по формуле (3) и размер партии каждой номенклатурной позиции, поставляемой от него по формуле (4). При необходимости в модель вводятся дополнительные условия и ограничения.

При разработке системы управления ассортиментными позициями материалов группы В подгруппы вероятностной интенсивности расходования используются следующие математические модели: в случаях, когда от одного поставщика доставляется одна ассортиментная позиция МПЗ – однопродуктовая статическая вероятностная модель управления запасами [2], в случаях, когда от одного поставщика доставляется несколько позиций – многопродуктовая.

Статическая вероятностная модель предполагает [4] пополнение запаса через одинаковые промежутки времени T_c , но, партиями различного размера. Размер первой партии поставки равен сумме текущей составляющей (Q^*) и страховой составляющей (s). Размер последующих партий, закупаемых в течение планового периода, равен количеству материала, израсходованному за прошедший между двумя заказами период продолжительности T_c . Для расчета Q^* и s используются данные прошлых периодов о размере спроса на материал. Данные подвергаются статистической обработке, в процессе которой, рассчитывается математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение спроса, а также выдвигается гипотеза о характере распределения вероятностей спроса и осуществляется проверка ее истинности по критерию Пирсона.

Затем размер текущей составляющей первой партии (Q^*) определяется по формуле (2), при расчетах вместо величины спроса D используется ее математическое ожидание \bar{D} . Размер страховой составляющей первой партии рассчитывается из условия, чтобы спрос на материал за период времени T_c не превысил суммы своего математического ожидания \bar{D} и среднего размера страховой составляющей $\frac{s}{T_c}$ с определенной вероятностью α . Иначе,

$p\left(D \leq \bar{D} + \frac{s}{T_c}\right) = \alpha$. Вероятность α выбирается в зависимости от требуемого уровня надежности экспертами предприятия, либо рассчитывается по формуле:

$$\alpha = \frac{g}{g + I \cdot C}, \text{ где} \quad (6)$$

g – издержки, связанные с отсутствием единицы МПЗ в единицу времени.

Таким образом, s находится из уравнения:

$$\int_0^{\bar{D} + \frac{s}{T_u}} f(D) dD = \alpha, \text{ где} \quad (7)$$

$f(D)$ - функция плотности распределения вероятностей спроса на рассматриваемый вид МПЗ.

В частности, если спрос подчиняется нормальному распределению, $f(D) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(D_j - \bar{D})^2}{2 \cdot \sigma^2}}$, где σ - среднеквадратическое отклонение спроса, то уравнение (7) будет выглядеть следующим образом:

$$\int_0^{\bar{D} + \frac{s}{T_u}} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(D_j - \bar{D})^2}{2 \cdot \sigma^2}} dD = \alpha.$$

Для нахождения значения s можно воспользоваться таблицами значений функции

Лапласа $\Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. В этом случае исходное уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \alpha, \text{ где } z = \frac{s}{T_u \cdot \sigma}.$$

С помощью таблиц значений функции Лапласа находится z , а затем размер страховой составляющей первой партии по формуле $s = z \cdot T_u \cdot \sigma$.

Если спрос подчиняется показательному распределению, то уравнение (7) имеет следующий вид:

$$\int_0^{\bar{D} + \frac{s}{T_u}} \frac{1}{\bar{D}} \cdot e^{-\frac{1}{\bar{D}} \cdot D_j} dD_j = \alpha$$

$$\text{откуда } s = -\bar{D} \cdot T_u \cdot (1 + \ln(1 - \alpha)).$$

Однако, рассмотренная статическая вероятностная модель управления запасами, может применяться не во всех случаях вероятностного спроса на МПЗ группы В, например, в случае поставки нескольких ассортиментных позиций МПЗ данной группы от одного поставщика, данную модель необходимо модифицировать с учетом возможности совместной поставки.

Первоначально, необходимо рассчитать математическое ожидание D_i и среднеквадратическое отклонение σ_i спроса по каждому виду материалов доставляемых совместно. Далее по формуле (5) рассчитывается количество совместных поставок в плановом периоде, вместо значения спроса на каждый вид МПЗ D_i используются их математические ожидания \bar{D}_i . Затем, по формуле (4) рассчитывается текущая составляющая первой партии каждого вида МПЗ Q_i^* , и, при помощи уравнения (7), определяется страховая составляющая первой партии каждого вида МПЗ s_i .

При необходимости в статическую вероятностную модель могут быть введены другие дополнительные условия и ограничения.

Для запасов группы С может быть использована система управления с периодической проверкой их фактического уровня.

Запасы группы С целесообразно разделять на подгруппы по видам спроса, поскольку они составляют лишь 5-8% материальной себестоимости готовой продукции предприятия и не относятся к скоропортящимся, или требующим специальных условий хранения. Для всех ассортиментных позиций этой группы используется единая система управления, основной задачей которой является обеспечение постоянного наличия запасов.

Исходя из заключенных на плановый период договоров на поставку готовой продукции определяется, какое количество каждой ассортиментной позиции запасов группы С будет требоваться в каждом месяце планового периода ($D_{1\text{дог}}, D_{2\text{дог}}, \dots, D_{n\text{дог}}, \dots, D_{N\text{дог}}$), $n = \overline{1, N}$ - порядковый номер месяца.

На основе данных предшествующего периода о производстве продукции, определяется, какое максимальное количество каждой ассортиментной позиции запасов группы С в месяц может потребоваться для производства продукции помимо договорной (D_{max}).

Уровни, до которых в каждом месяце планового периода должен пополняться запас, определяются следующим образом:

$$Q_1 = (D_{1\text{дог}} + D_{\text{max}}) \cdot 1.2$$

$$Q_2 = (D_{2\text{дог}} + D_{\text{max}}) \cdot 1.2$$

.....

$$Q_n = (D_{n\text{дог}} + D_{\text{max}}) \cdot 1.2$$

.....

$$Q_N = (D_{N\text{дог}} + D_{\text{max}}) \cdot 1.2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Грылева И. В. Учет переменной стоимости запасаемой продукции в статической детерминированной модели управления запасами промышленного предприятия. // Современные аспекты экономики – С-Пб. 2003. №4 (32). С. 74-80.
2. Доможирова И. В. Использование экономико-математических моделей в управлении товарными запасами организации. // Известия Тульского государственного университета. Экономические и юридические науки. 2013. № 2-1. С. 165-171.
3. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами – СПб.: Питер, 2001. 384 с.
4. Сакович В.А. Модели управления запасами – Минск: Наука и техника, 1986. 319 с.
5. Уразбахтин И. Р. Расширение возможностей систем управления запасами промышленных предприятий, основанных на ретроспективных моделях. // Экономика и социум. 2013. №3 (8). С. 709-711.

Irina Gryleva

Pskov State University
Russia, Pskov

E-Mail: irina.gryleva@gmail.com

Application conditions of the static deterministic and stochastic lot size models

Abstract: The study showed application conditions of some static deterministic and stochastic lot size models. A reasonable application of mathematical models for inventory management, conduce to the decreasing of the costs of ordering, holding and deficit of the stocks. The study showed the necessity of calculating the reasonable order quantity before the price increasing. The study developed multi-item deterministic lot size model for the case of ordering different items of stocks from the same region. The results of the study extended the knowledge of the conditions of applicability of mathematical lot size models.

Key words: multi-item static deterministic lot size model; static stochastic order quantity model; static deterministic lot size model in the conditions of variable purchase price of the item and variable ordering costs; ABC – analysis; development of the inventory management system.

REFERENCES

1. Gryleva I. V. Static deterministic lot size model in the conditions of variable purchase price of the item and variable ordering costs.// Modern aspects of the economy – Saint-Petersburg. 2003. №4 (32). P. 74-80.
2. Domozhirova I. V. Use of the economic - mathematical models in management of commodity stocks organizations. // Proceedings of Tula state university. Economic and legal science. 2013. № 2-1. P. 165-171.
3. Ryzhykov YU. I. Queuing theory and inventory management – Saint-Petersburg: Piter, 2001. 384 p.
4. Sakovich V.A. Lot size models – Minsk: Science and Technology, 1986. 319 p.
5. Urasbahtin I. R. Empowering inventory management systems of industrial enterprises based on historical models. // Economy and society. 2013. №3 (8). P. 709-711.